DINAMICA SIST. A N G.D.L.; OSCILLAZ. LIBERE NON SMORZATE

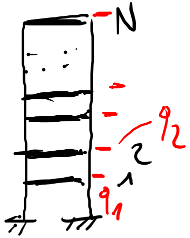
14/3/2023

$$\odot \begin{cases} \underset{\sim}{M}\,\ddot{\underline{q}} + \underset{\sim}{K}\,\underline{q} = \underline{0} \\ \underline{q}(0) = \underline{q}_0 \\ \dot{\underline{q}}(0) = \dot{\underline{q}}_0 \end{cases}$$

; $\underline{q}(t)$: vettore dei g.d.l. del sistema (N componenti)

$\underset{\sim}{M}$: matrice delle masse ; $\underset{\sim}{K}$: matrice di rigidezza

CONDIZ. INIZIALI (2N, NOTA: 2N SONO ANCHE LE COSTANTI DI INTEGRAZ. DA DETERMINARE)



Ammettiamo che $\underline{q}(t) = \underbrace{\underline{\phi}}_{\text{VETTORE DELLE AMPIEZZE}} (A\cos\omega t + B\sin\omega t)$; $\ddot{\underline{q}}(t) = -\omega^2 \underline{\phi}\, \underbrace{(A\cos\omega t + B\sin\omega t)}_{\circledast}$

$$\odot \quad -\omega^2 \underset{\sim}{M}\,\underline{\phi}\,\circledast + \underset{\sim}{K}\,\underline{\phi}\,\circledast = 0 \quad \Rightarrow \forall t \Rightarrow \quad \boxed{(\underset{\sim}{K} - \omega^2 \underset{\sim}{M})\,\underline{\phi} = \underline{0}}$$

SIST. OMOGENEO CHE AMMETTE SOLUZ. DIVERSE DALLA OVVIA SE $\det(\underset{\sim}{K} - \omega^2 \underset{\sim}{M}) = 0$

PROBL. AGLI AUTOVALORI GENERALIZZATO

$$\det(\underset{\sim}{K} - \omega^2 \underset{\sim}{M}) = 0 \Rightarrow \alpha_N (\omega^2)^N + \alpha_{N-1}(\omega^2)^{N-1} + \dots + \alpha_0 = 0$$

EQ. CARATTERISTICA

INCOGNITE: ω^2

$\Rightarrow$ SOLUZ. $(\omega^2)_1, (\omega^2)_2, \dots (\omega^2)_N$: AUTOVAL. DEL PROBLEMA

ORDINO LE SOLUZ. : $0 \leq \omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_N$

LISTA DI PULSAZIONI ORDIN.

PULSAZIONE FONDAMENTALE

$T_i = \frac{2\pi}{\omega_i}$

PERIODO FONDAMENTALE $T_1 \geq T_2 \geq T_3 \dots \geq T_N > 0$

AUTOVL $\Rightarrow$ AUTOVT.

$\omega_i \Rightarrow \underline{\phi}^{(i)}$: MODO DI VIBRARE i-SIMO (OPPORTUNAMENTE NORMALIZZATO :

$\max |\phi_j^{(i)}| = 1$

$|\underline{\phi}^{(i)}| = 1$ (NORMA VETTORIALE))

COME RAPPRESENTO IL MOTO $\underline{q}(t)$?

$$\underline{q}(t) = \sum_{m=1}^{N} \underline{\phi}^{(m)} \left[A_m \cos \omega_m t + B_m \sin \omega_m t \right]$$

2N INCOGNITE

SI RICAVANO DALLE CONDIZ. INIZIALE

ANALISI MODALE: STUDIO DEL SISTEMA DISCRETO ATTRAVERSO I MODI DI VIBRARE.

INTRODUCO LA MATRICE MODALE

$$\underset{\sim}{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(1)} & \cdots & \phi_1^{(N)} \\ \vdots & & \vdots \\ \phi_N^{(1)} & \cdots & \phi_N^{(N)} \end{bmatrix} \quad N \times N$$

$$\underline{\phi}^{(1)} \quad \cdots \quad \underline{\phi}^{(N)}$$

MATRICE SPETTRALE (DIAGONALE)

$$\underset{\sim}{\Omega} = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \omega_N^2 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

COORDINATE PRINCIPALI $(\underline{z}(t))$ VETTORE DI ORDINE N

$$\underline{q}(t) = \underset{\sim}{\Phi}\,\underline{z}(t) \; ; \quad \underline{\dot{q}}(t) = \underset{\sim}{\Phi}\,\underline{\dot{z}}(t) \; ; \quad \underline{\ddot{q}} = \underset{\sim}{\Phi}\,\underline{\ddot{z}}$$

$$\rightsquigarrow \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underline{\ddot{z}} + \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Phi}\,\underline{z} = \underline{0} \qquad \Rightarrow \quad \hat{\underset{\sim}{M}}\,\underline{\ddot{z}} + \hat{\underset{\sim}{K}}\,\underline{z} = \underline{0} \qquad N \text{ EQ.}$$

$$\underbrace{\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{M}\,\underset{\sim}{\Phi}}_{\hat{\underset{\sim}{M}}}\,\underline{\ddot{z}} + \underbrace{\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\Phi}}_{\hat{\underset{\sim}{K}}}\,\underline{z} = \underline{0}$$

$\hat{\underset{\sim}{M}} \rightarrow \downarrow \leftarrow \hat{\underset{\sim}{K}}$

DIAGONALI

$$\begin{cases} \hat{m}_1 \ddot{z}_1 + \hat{k}_1 z_1 = 0 \\ \hat{m}_2 \ddot{z}_2 + \hat{k}_2 z_2 = 0 \\ \vdots \\ \hat{m}_N \ddot{z}_N + \hat{k}_N z_N = 0 \end{cases}$$

N EQUAZ. SCALARI INDIPEN.

⇓

N OSCILL. SEMPLICI.

$$\hat{\underset{\sim}{M}} = \begin{bmatrix} \hat{m}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{m}_N \end{bmatrix} \; ; \quad \hat{\underset{\sim}{K}} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \hat{k}_N \end{bmatrix}$$

$\hat{m}_i = \underline{\phi}^{(i)} \cdot \underset{\sim}{M}\, \underline{\phi}^{(i)}$; $\hat{K}_i = \underline{\phi}^{(i)} \cdot \underset{\sim}{K}\, \underline{\phi}^{(i)}$: VALORI CON DUBBIA INTERPRETAZ. FISICA.

STUDIO UNA SINGOLA EQ. DISACC. (AD ESEMPIO $i = 1$)

$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = 0$; $\omega_1^2 = \dfrac{\hat{K}_1}{\hat{m}_1} = \boxed{\dfrac{\underline{\phi}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{K}\, \underline{\phi}^{(1)}}{\underline{\phi}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{M}\, \underline{\phi}^{(1)}}}$

RAPPORTO DI RAYLEIGH

(IMPORTANTE PER STIME DI TIPO SPERIMENTALE DELLE PULSAZIONI)

– PRESENZA DI FORZANTI

$\underline{F}(t) = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_N \end{bmatrix} \sin \bar{\omega} t$

VETTORE DELLE FORZANTI

$\bar{\omega}$ ← PULSAZIONE DELLA FORZANTE

$\underset{\sim}{M}\, \underline{\ddot{q}}(t) + \underset{\sim}{K}\, \underline{q}(t) = \underline{F}(t)$

$\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{M}\, \underset{\sim}{\Phi}\, \underline{\ddot{z}} + \underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{K}\, \underset{\sim}{\Phi}\, \underline{z} = \overbrace{\underset{\sim}{\Phi}^T \underline{F}(t)}^{\underline{\hat{F}}(t)}$

$\boxed{\underset{\sim}{\hat{M}}\, \underline{\ddot{z}} + \underset{\sim}{\hat{K}}\, \underline{z} = \underline{\hat{F}}(t)}$ →

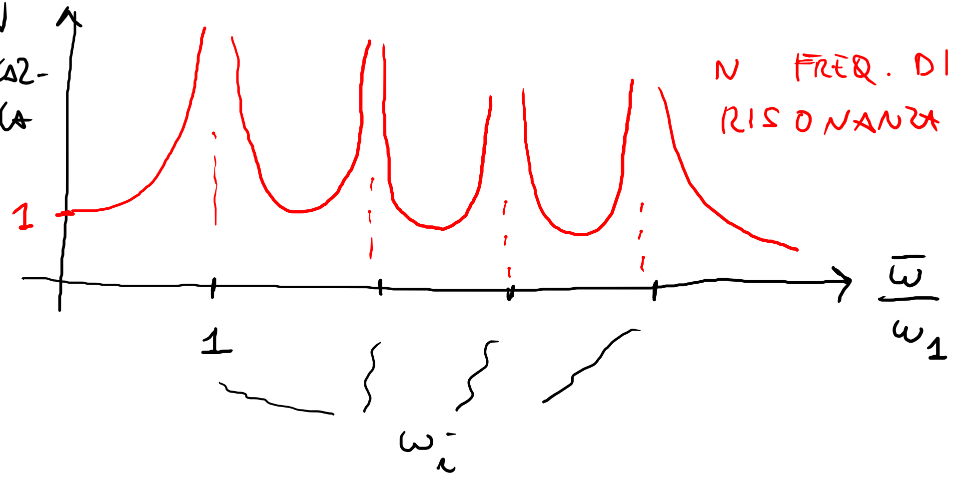
$\begin{cases} \hat{m}_1 \ddot{z}_1 + \hat{K}_1 z_1 = \hat{F}_1(t) \\ \vdots \\ \hat{m}_N \ddot{z}_N + \hat{K}_N z_N = \hat{F}_N(t) \end{cases}$

→ N OSCILLATORI INDIPENDENTI CON FORZANTE

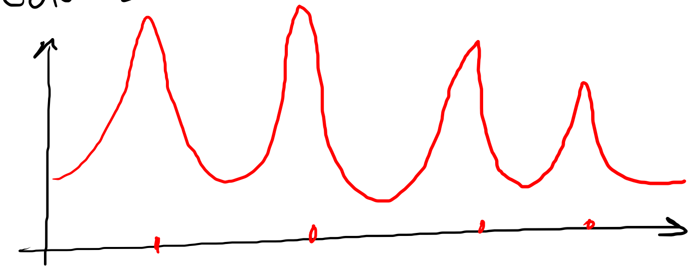
$$
\begin{cases}
\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = \dfrac{1}{\hat{m}_1} \hat{F}_1(t) \\
\vdots \\
\ddot{z}_N + \omega_N^2 z_N = \dfrac{1}{\hat{m}_N} \hat{F}_N(t)
\end{cases}
$$

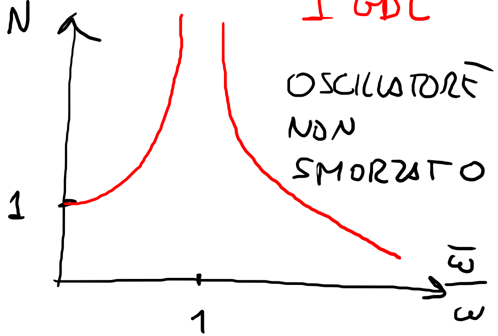
N AMPLIFICAZ. DINAMICA

OSCILLAT. NON SMORZ.



CON SMORZAMENTO





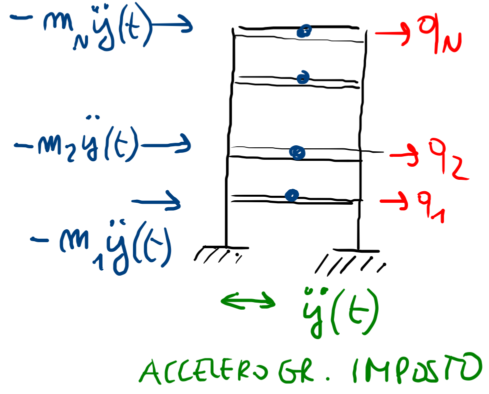
— MOTO IMPRESSO ALLA BASE

QUESTO PROBLEMA IMPONE LA FORZANTE: $\underset{\sim}{F}(t) = -\underset{\sim}{M}\,\underline{1}\,\ddot{y}(t)$

VETTORE $\underline{\mu}$

VETTORE UNITARIO

(ATTENZ: VALE SOLO PER TELAI SHEAR-TYPE, VEDREMO PIÙ AVANTI IL PROBLEMA CON GDL ROTAZIONALE)



TELAIO SHEAR-TYPE

$$\underset{\sim}{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & \\ & m_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & m_N \end{bmatrix}$$

$$\underline{\mu} = \underset{\sim}{M}\,\underline{1} = \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_N \end{bmatrix}$$

$$\hat{\underline{F}}(t) = -\underset{\sim}{\Phi}^T \underset{\sim}{M}\,\underline{1}\,\ddot{y}(t)$$

Nel sistema delle coordinate principali l'eq. dell'oscillatore semplice è:

$$\hat{m}_1 \ddot{z}_1 + \hat{k}_1 z_1 = -\underline{\phi}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{M}\,\underline{1}\,\ddot{y}(t)$$

⋮ (N EQUAZ.)

$$\ddot{z}_1 + \omega_1^2 z_1 = -\overbrace{\frac{\underline{\phi}^{(1)} \cdot \underset{\sim}{M}\,\underline{1}}{\hat{m}_1}}^{g_1}\,\ddot{y}(t)$$

⋮

N EQUAZ

(Γ_i) (FATTORE)

g_i : COEFFICIENTE DI PARTECIPAZIONE MODALE : CONTRIBUTO DELLA SOLLECITAZ. DINAMICA ALL'i-SIMO OSCILLATORE SEMPLICE se $\underset{\sim}{M}$ è DIAGONALE

$$g_1 = \frac{m_1 \phi_1^{(1)} + m_2 \phi_2^{(1)} + m_3 \phi_3^{(1)} + \dots}{m_1 \phi_1^{(1)} \phi_1^{(1)} + m_2 \phi_2^{(1)} \phi_2^{(1)} + m_3 \phi_3^{(1)} \phi_3^{(1)} + \dots}$$

È IMPORTANTE IL CONFRONTO TRA I VARI g_i