METODI AVANZATI DI TEORIA QUANTISTICA DEI CAMPI

cioè

TEORIA DEI CAMPI III

GRUPPI e ALGEBRE di LIE

GRUPPO : insieme con un'operazione $\cdot : G \times G \to G$ t.c.

1) Identità : $\exists\, \mathbb{1} \in G$ t.c. $\mathbb{1} \cdot g = g \cdot \mathbb{1} = g \quad \forall g \in G$
2) Inverso : $\forall g \in G \quad \exists\, g^{-1} \in G$ t.c. $g \cdot g^{-1} = g^{-1} \cdot g = \mathbb{1}$
3) Associatività : $\forall g_1, g_2, g_3 \in G \quad (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$

Siamo interessati a GRUPPI CONTINUI, cioè gruppi che contengono elementi arbitrariam. vicini a $\mathbb{1}$

↳ detti GRUPPI DI LIE e hanno una struttura di VARIETÀ DIFFERENZIABILE

ES. $\quad G = SO(n)$

$$= \{ \text{matrici ortogonali } n \times n \}$$
$$= \{ O \in M_{n\times n} \mid O^T O = \mathbb{1} = O O^T \}$$

- è un gruppo col prodotto di matrici :

$$O_1 \cdot O_2 \in SO(n) \qquad (O_1 O_2)^T O_1 O_2 = O_2^T \underbrace{O_1^T O_1}_{\mathbb{1}} O_2 = \mathbb{1}$$

- è una varietà. Restringiamoci a $n=2$ $\quad SO(2)$
Parametrizziamo gli elem. di $SO(2)$ scegliendo una "coordinata" :

$$O = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \qquad \varphi \in [0, 2\pi[$$

⇝ $SO(2)$ è diffeomorfo al CERCHIO S^1

$$\mathbb{1} \Leftrightarrow \varphi = 0 \quad \Bigg| \quad \varphi = \epsilon \ll 1 \qquad O = \mathbb{1} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}} + \begin{pmatrix} \epsilon^2/2 & \\ & \epsilon^2/2 \end{pmatrix} + \dots$$

Es. $SU(2) = \{ U \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \text{ \& } \det U = 1 \}$

Vediamo come parametrizzare tali matrici.

Data $U \in \mathcal{M}_{2\times 2}$, $U = \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\det U = ab - cd$

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} a^* & d^* \\ c^* & b^* \end{pmatrix} \qquad U^{-1} = \frac{1}{\underset{=1}{\det U}} \begin{pmatrix} b & -c \\ -d & a \end{pmatrix}$$

$$U^\dagger = U^{-1} \Rightarrow b = a^* \text{ \& } d = -c^*$$

$$\Rightarrow \det U = |a|^2 + |c|^2$$

Richiedere $\det U = 1 \rightsquigarrow (\operatorname{Re} a)^2 + (\operatorname{Im} a)^2 + (\operatorname{Re} c)^2 + (\operatorname{Im} c)^2 = 1 \quad (*)$

cioè $SU(2)$ è una sottovarietà in $\mathbb{R}^4$ definita dall'equazione $(*)$, cioè è una sfera 3d S^3 !

Consideriamo lo spazio tangente a $\mathbb{1}$ $T_{\mathbb{1}}G$.
Esso è chiamato l' ALGEBRA DI LIE associata a G

ALGEBRA DI LIE $\mathfrak{g}$: è uno SPAZIO VETTORIALE con un prodotto BILINEARE ANTISIMM. $[\ ,\ ]: \mathfrak{g}\times\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ che soddisfa l'id. di Jacobi

$[\ ,\ ]$ su $\mathfrak{g}=T_{\mathbb{1}}G$ è dato da $[\ ,\ ]$ sui campi vett. di G

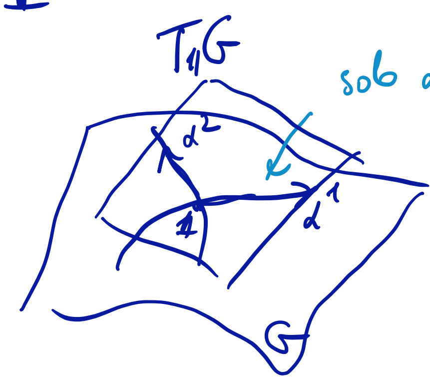
(X, Y campi vett., deriv. di Lie $\mathcal{L}_X Y = \sum_i (X^i\partial_i Y - Y^i\partial_i X) =$

$= -\mathcal{L}_Y X = [X,Y]$)

Restringiamo su pto $\mathbb{1}$ $\rightarrow$
allora $X, Y, [X,Y] \rightarrow$ vett. in $\mathfrak{g}$

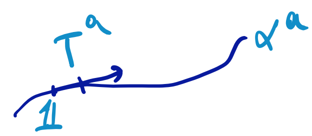
Essendo G una varietà diff., possiamo scegliere un set di coordinate α^a $a=1,\dots,\dim G$
tali che $\alpha^a=0 \leftrightarrow \mathbb{1}$

Prendiamo le linee coordinate
i vett. tg a tali linee
fanno una base per $T_{\mathbb{1}}G$



solo α^1 varia $\begin{pmatrix}\alpha^1\\ \alpha^2\\ \vdots\\ \alpha^d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$

Prendiamo linea coord. α^1
Se $\alpha^1 \ll 1$ allora l'elemento



$$g(\alpha) = \mathbb{1} + i\,\alpha^1 \underbrace{T^1}_{\text{vett. tg alla linea coord. } \alpha^1}$$

$\leftarrow$ + inteso su spazio affine (intorno di $\mathbb{1}$)

T^a sono detti: GENERATORI del gruppo di Lie G e formano una base per $\mathcal{G} = T_{\mathbb{1}}G$.

$$[V, W] = [\alpha^a T^a, \beta^b T^b] = \alpha^a \beta^b [T^a, T^b]$$

$$[T^a, T^b] \in \mathcal{G} \Rightarrow [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c$$

COSTANTI DI STRUTTURA

Elem. infinitesimo del GRUPPO (spostam. infinitesimo lungo vett. $\vec{\alpha} = \alpha^a \vec{T}^a$)

(★) $\quad g(\alpha) = \mathbb{1} + i \alpha^a T^a \quad$ (somma su a implicita)

Integrando (★), otteniamo

$$g(\alpha) = e^{i\alpha^a T^a} \qquad \text{(MAPPA ESPONENZIALE)}$$

- Ci restringeremo a Gruppi di Lie COMPATTI e di DIMENSIONE FINITA

- Se un generatore T "commuta" con tutti gli altri, allora T genera un SOTTOGRUPPO ABELIANO $U(1)$

$$e^{iT\alpha + iT^2\alpha^2 + \dots + iT^d\alpha^d} = e^{i\alpha T} \, e^{i\sum_{i=2}^{d} \alpha^i T^i}$$

sottogruppo dato da elem. $\vec{\alpha} = (\alpha, 0, \dots, 0)$

- Quando G non contiene sottogruppi abeliani, il gruppo è detto SEMI-SEMPLICE

Se i generatori non possono essere divisi in due sottoinsiemi che commutano tra loro, allora è detto SEMPLICE.

– In generale l'Alg di Lie sarà della forma

$$\mathcal{G} = \bigoplus_{i=1}^{\#ab} \langle T^i \rangle \bigoplus_{\alpha = \text{algebre semplici}} \mathcal{G}^\alpha$$

[Killing - Cartan]

E' possibile CLASSIFICARE tutte le alg. di Lie semplici (complesse)

$\boxed{A_n \rightsquigarrow G = SU(n+1)}$

$B_n \rightsquigarrow G = SO(2n+1)$

$C_n \rightsquigarrow G = Sp(n)$

$D_n \rightsquigarrow G = SO(2n)$

Classiche

Lorentz

E_6 F_4

E_7 G_2

E_8

Eccezionali

$$SU(N) = \{ U \in M_{N \times N}(\mathbb{C}) \mid U^\dagger U = U U^\dagger = \mathbb{1} \ \& \ \det U = 1 \}$$

$\downarrow$

$\mathcal{G}$? $\qquad U = e^{iT} \qquad T = \alpha^a T^a \in \mathcal{G}_{SU(N)}$

Che proprietà ha T affinché $U \in SU(N)$?

$$U^\dagger = e^{-iT^\dagger} \qquad U^\dagger U = \mathbb{1} \Rightarrow e^{-iT^\dagger} \cdot e^{iT} = \mathbb{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-iT^\dagger} = e^{-iT} \underset{\substack{\text{mappa esp} \\ \text{è isomorf.}}}{\Longrightarrow} T^\dagger = T$$

T è hermitiana

$$1 = \det U \Rightarrow \quad 1 = \det e^{iT} = e^{i\,\mathrm{tr}\,T} \rightarrow \mathrm{tr}\,T = 0$$

T è traceless

$$\mathfrak{g}_{SU(N)} = \{ T \in M_{N\times N}(\mathbb{C}) \mid T^{\dagger} = T \ \& \ \mathrm{tr}\,T = 0 \}$$

Es. $SU(2)$ è generato da matrici 2×2 hermitiane e traceless

$\rightarrow$ base è data da matrici di Pauli σ^i

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^j}{2} \right] = i \underbrace{\epsilon^{ijk}}_{f^{ijk}} \frac{\sigma^k}{2}$$

Verifichiamo che $U = e^{i\alpha^i\sigma^i}$ è unitaria

$$U = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n (\alpha^i\sigma^i)^n}{n!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m}}{(2m+1)!} i (\alpha^i\sigma^i)^{2m} \alpha^i\sigma^i$$

$n = 2m+1$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k}}{(2k)!} (\alpha^i\sigma^i)^{2k}$$

$$(\alpha^i\sigma^i)^2 = \\ = \|\alpha\|^2 \cdot \mathbb{1}$$

$$= \mathbb{1} \cos\|\alpha\| + i \frac{\alpha^i\sigma^i}{\|\alpha\|} \operatorname{sen}\|\alpha\|$$

$$U^{\dagger} = \mathbb{1} \cos\|\alpha\| - i \frac{\alpha^i\sigma^i}{\|\alpha\|} \operatorname{sen}\|\alpha\| \qquad U^{\dagger}U = \mathbb{1}$$