ESERCIZI SU SPAZI VETTORIALI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Sia V un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. **Dimostra**, usando le otto proprietà che definiscono gli spazi vettoriali, che per ogni vettore $v \in V$ esiste *un unico* vettore opposto $-v$. Ricorda che la definizione di spazio vettoriale richiede solamente che un vettore opposto esiste, ma non richiedono l'unicità di tale vettore opposto.

Esercizio 2

Ricorda che $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne ordinate di numeri reali:

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}\,.$$

Abbiamo visto che $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale, dove $+$ e $\cdot$ sono definite componente per componente.

Considera il sottoinsieme $W \subset \mathbb{R}^3$ dato da:

$$W := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0 \quad \text{e} \quad 2x - y - z = 0\}\,.$$

Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$.

Esercizio 3

Calcola quattro diverse soluzioni del sistema

$$\begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ \quad 3x + 2y = 0 \end{cases}$$

Crea poi una matrice A in modo che le *colonne* di tale matrice siano date dalle quattro soluzioni che hai calcolato precedentemente. **Scrivi** poi le tre righe $A_{(1)}$, $A_{(2)}$ e $A_{(3)}$ della matrice A.

Esercizio 4

Ricorda che l'insieme dei *polinomi* in una variabile a coefficienti reali, che denotiamo con $\mathbb{R}[x]$, è l'insieme delle espressioni del tipo:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_1 x + a_0$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$. I numeri $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sono detti i *coefficienti* del polinomio; in particolare, per ogni $i \in \{0, \ldots, n\}$, il numero a_i è detto il coefficiente di x^i. In questo caso si dice che il polinomio ha *grado* n se $a_n \neq 0$ (al polinomio 0 non si assegna grado). Sono quindi esempi di polinomi:

$$3x^2 + 4x - 1\,, \quad \text{oppure} \quad x^{12} - \sqrt{17}\,, \quad \text{oppure} \quad x^4 - 2x^2 + x + 3\,.$$

Tali polinomi hanno rispettivamente grado 2, 12 e 4.

Definiamo la *somma* tra polinomi nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & (p,q) & \mapsto & p+q \end{array}$$

dove il polinomio $p+q$ è definito nella maniera seguente. Se

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \text{e} \quad q = b_m x^n + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

per qualche $n, m \in \mathbb{N}$ e per $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ e $b_0, b_1, \ldots, b_{m-1}, b_m \in \mathbb{R}$, allora:

se $n = m$:

$$p + q := (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

se $n > m$:

$$p+q := a_n x^n + \cdots + a_{m+1}x^{m+1} + (a_m + b_m)x^m + (a_{m-1} + b_{m-1})x^{m-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

se $n < m$:

$$p+q := b_m x^m + \cdots + b_{n+1}x^{n+1} + (a_n + b_n)x^n + (a_{n-1} + b_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (a_1 + b_1)x + (a_0 + b_0)$$

Ad esempio, abbiamo che

$$(3x^3 + 2x + 1) + (-4x^2 + 3x + 2) = 3x^3 - 4x^2 + 5x + 3\,.$$

Definiamo la *moltiplicazione per uno scalare* tra un numero reale e un polinomio nel modo seguente:

$$\begin{array}{rccc} +: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] & \to & \mathbb{R}[x] \\ & (\lambda, p) & \mapsto & \lambda \cdot p \end{array}$$

dove il polinomio $\lambda \cdot p$ è definito nella maniera seguente. Se

$$p = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0\,,$$

allora definiamo

$$\lambda \cdot p := (\lambda\, a_n)x^n + (\lambda\, a_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (\lambda\, a_1)x + (\lambda\, a_0)\,.$$

Ad esempio abbiamo che

$$2 \cdot (x^5 + 2x^3 - 1) = 2x^5 + 4x^3 - 2\,.$$

Verifica che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ soddisfa le proprietà V3, V4, V7 e V8 degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali. Invero, vale che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ soddisfa *tutte* le proprietà degli $\mathbb{R}$-spazi vettoriali e quindi è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Esercizio 5

Ricorda dall'Esercizio 4 che $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. Considera il sottoinsieme $W \subset \mathbb{R}[x]$ dato da:

$$W := \{p \in \mathbb{R}[x] \mid p = 0 \text{ oppure } p \text{ ha grado minore o uguale a } 2\}\,.$$

In altre parole, gli elementi di W sono tutti e soli i polinomi della forma

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 \quad \text{con } a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}\,.$$

Dimostra che W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.