A e B (fig. 80): i punti A'_∞ e B'_∞ dell'iperbole, trasformati di A e di B, forniscono le direzioni degli asintoti. Questi a loro volta restano determinati come rette omologhe delle tangenti a e b al cerchio γ nei punti A e B. Il punto C', comune alle rette a' e b' (centro dell'iperbole e polo della retta i'_∞, rispetto a γ'), è l'omologo del punto C, comune ad a e b e polo della retta i rispetto a γ.

Gli assi h' e k' dell'iperbole coincidono con le bisettrici degli asintoti; per individuare l'asse traverso e su questo i vertici V' e W', si trasformino mediante l'omologia inversa le rette h' e k' in h e k e si scelga delle due quella che risulta secante il cerchio γ (in figura è la retta h), nei punti V e W.

Per il tracciamento dell'iperbole, si proceda trasformando altri punti di γ e servendosi delle proprietà di simmetria rispetto agli assi e al centro.

Si noti che ciascuno degli archi in cui il cerchio γ è diviso dalla retta limite i, si trasforma in uno dei rami dell'iperbole.

Capitolo secondo
IL METODO DI MONGE

17. Premesse

Il *Metodo di Monge* si avvale di due centri di proiezione impropri distinti e di due piani di proiezione: esso fornisce dunque due immagini spesso assai diverse di ogni configurazione dello spazio. Rispetto al metodo delle Proiezioni centrali, tuttavia, le relazioni che legano gli oggetti e le relative immagini sono assai più semplici: come sappiamo infatti le proiezioni parallele conservano il parallelismo (cfr. Parte I, III.3.); inoltre, con opportuna scelta del riferimento, molte misure lineari e angolari possono restare invariate (segmenti paralleli ad un piano di proiezione si proiettano in segmenti di lunghezza uguale ai dati).

In campo architettonico, tale metodo è largamente adottato per rappresentare le forme nelle loro reali proporzioni (pianta e prospetto), sia in sede di rilievo che in sede di progetto.

Il metodo di Monge è dunque fondamentale; tuttavia, poiché fraziona ogni oggetto in due immagini distinte, risulta inadeguato per la comprensione immediata e complessiva delle configurazioni: per questo motivo viene affiancato, con reciproco vantaggio, da altri metodi quali la Prospettiva e l'Assonometria che forniscono una rappresentazione unitaria più prossima all'immagine visiva.

18. Il riferimento

Il riferimento nello spazio è costituito da due piani perpendicolari tra loro, detti rispettivamente *primo piano di proiezione* π_1 e *secondo piano di proiezione* π_2; il primo viene anche denominato *piano orizzontale* e il secondo *piano verticale*, in relazione al fatto che generalmente viene assunto come primo piano di proiezione, quello di calpestio. La retta intersezione di π_1 con π_2, dicesi *linea di terra* e si indica con la lettera l.

Lo spazio risulta così suddiviso in quattro diedri, denominati rispettivamente I, II, III e IV diedro e, supposto l'osservatore nel I diedro, i piani di proiezione vengono suddivisi dalla retta l in: semipiano anteriore e semipiano superiore (I diedro); semipiano superiore e semipiano posteriore (II diedro); semipiano posteriore e semipiano inferiore (III diedro) e infine semipiano inferiore e semipiano anteriore (IV diedro) (fig. 1). Inoltre, il piano π_1 (π_2) è origine del semispazio *positivo* che contiene I e II diedro (I, IV diedro) e del semispazio *negativo* che contiene III e IV diedro (II, III diedro).

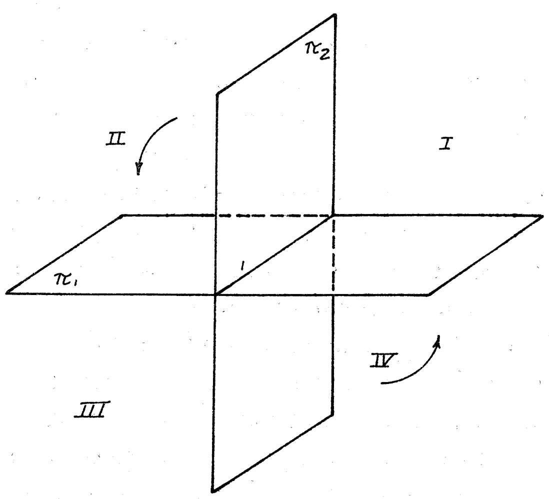

Fig. 1

Considerato il foglio del disegno coincidente con π_1, si suppone di ribaltare π_2 su π_1, nel verso che porta a coincidere il semipiano superiore col semipiano posteriore: resta così fissato il riferimento sul quadro costituito dalla retta orizzontale l, che divide il foglio in due parti: in quella superiore coincidono il semipiano posteriore di π_1 e il ribaltato del semipiano superiore di π_2; in quella inferiore, il semipiano anteriore di π_1 e il ribaltato del semipiano inferiore di π_2.

19. Rappresentazione del punto

Ciascun punto P dello spazio viene proiettato su π_1 dal punto $O_{1\infty}$ (direzione ortogonale a π_1) in P' e su π_2 dal punto $O_{2\infty}$ (direzione ortogonale a π_2) in $\overline{P}''$: i punti P' e $\overline{P}''$ vengono denominati rispettivamente: *prima proiezione* o *proiezione orizzontale* e *seconda proiezione* o *proiezione verticale* di P.

Le rette PP' e $P\overline{P}''$, ortogonali tra loro, individuano un piano γ, ortogonale a π_1 e π_2; nel ribaltamento di π_2 su π_1, il punto $\overline{P}''$ descrive nel piano γ un arco di circonferenza di centro P_0 e raggio uguale al segmento

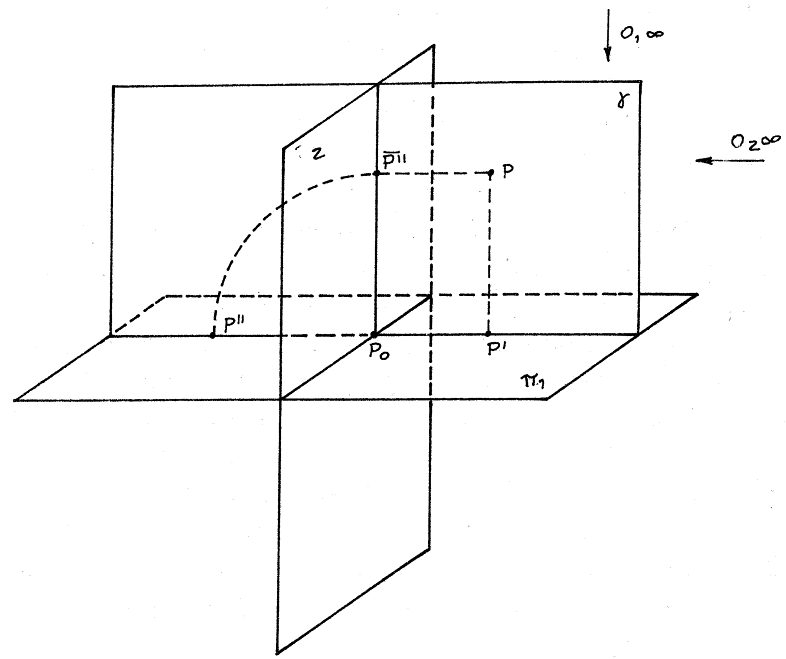

Fig. 2

$\overline{P_0\overline{P}''}$, e interseca π_1 in un punto P'' sulla normale ad l condotta per P'; questa retta, che è l'intersezione del piano γ con π_1 (fig. 2) e alla quale appartengono le immagini P' e P'', dicesi *retta di richiamo*.

Viceversa: dati sul foglio del disegno (in cui coincidono π_1 e il ribaltato π_2^* di π_2) due punti P′ e P″, appartenenti ad una retta perpendicolare alla linea di terra l, resta individuato uno e un sol punto P dello spazio.

Infatti, con il raddrizzamento del piano π_2^* intorno ad l, si ottiene il punto $\overline{\mathrm{P}}''$ su π_2; le rette $\overline{\mathrm{P}}''\mathrm{P}_0$ e $\mathrm{P}_0\mathrm{P}'$ individuano un piano γ perpendicolare a π_1 e a π_2; condotte, rispettivamente, da P′ la retta perpendicolare a π_1 e da $\overline{\mathrm{P}}''$ la perpendicolare a π_2, tali rette, complanari in γ e non parallele tra loro, s'incontrano in un punto proprio P, di cui P′ e P″ sono le immagini.

Concludiamo dunque che:

Ogni generico punto P *dello spazio è biunivocamente rappresentato dalle due immagini* P′ *e* P″, *appartenenti ad una retta perpendicolare alla linea di terra.*

Il simbolo P(P′, P″) denota la rappresentazione del punto P mediante le immagini P′, P″.

Dicesi *quota* (risp. *aggetto*) di un punto P dello spazio la sua distanza dal piano π_1 (π_2) o il numero opposto, secondo che P appartenga al semispazio positivo di origine π_1 (π_2) o al semispazio negativo di origine π_1 (π_2). Allora: i punti del primo diedro hanno quota e aggetto positivi; quelli del secondo diedro, quota positiva e aggetto negativo; quelli del terzo, quota e aggetto negativi; quelli del quarto, quota negativa e aggetto positivo. I punti di π_1 (π_2) hanno quota (aggetto) uguale a zero.

Nella fig. 3 a sono indicate le costruzioni spaziali che determinano le proiezioni dei punti P, Q, R, K appartenenti ciascuno ad un diedro diverso, e nella fig. 3 b le relative rappresentazioni sul foglio. Osservando la disposizione delle immagini, è possibile conoscere di ogni punto, in valore e segno, sia la quota che l'aggetto, e di conseguenza a quale diedro esso appartenga.

Un punto S di π_1 ha la prima proiezione S′ coincidente con S e la seconda nel punto $\mathrm{S}'' \equiv \mathrm{S}_0$ della retta l (fig. 4a): il segmento $\overline{\mathrm{SS}''}$ risulta al di sotto o al di sopra della linea di terra secondo che S appartenga al semipiano anteriore o al semipiano posteriore: l'aggetto sarà dunque positivo o negativo, la quota sempre nulla. Un punto T, appartenente a π_2, ha la seconda proiezione $\overline{\mathrm{T}}''$, coincidente con T e la prima in un punto $\mathrm{T}' \equiv \mathrm{T}_0$ della retta l: la quota sarà positiva o negativa, secondo che T appartenga al semipiano superiore o inferiore, l'aggetto sempre

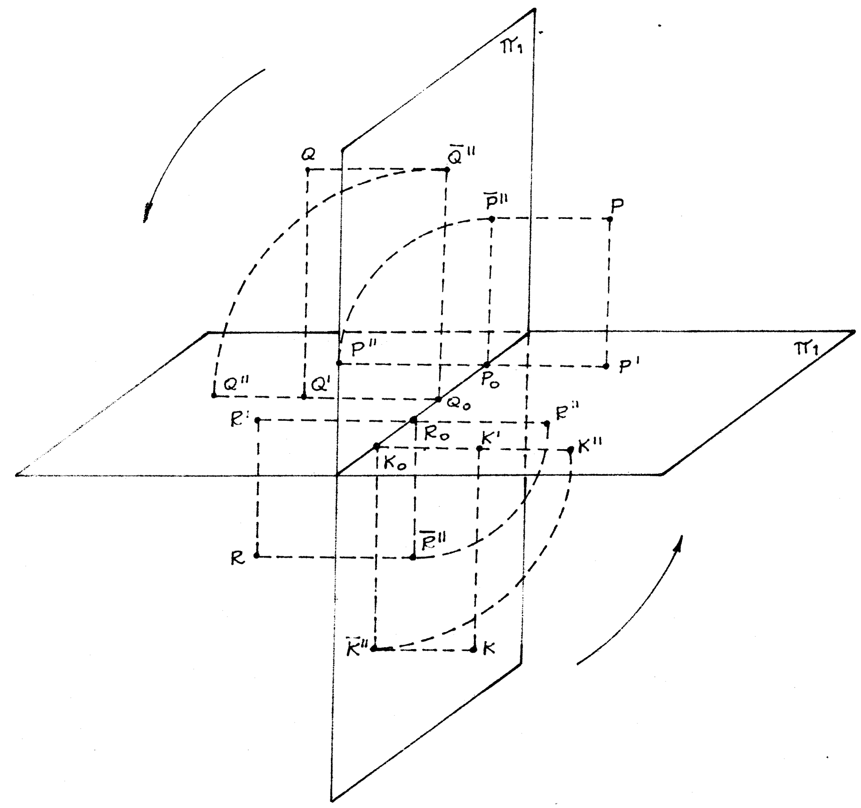

Fig. 3 a

nullo. Nella fig. 4b sono date le rappresentazioni di un punto S e di un punto T: di tali punti, ove non sia necessario, si può tralasciare la denominazione rispettivamente della seconda e della prima proiezione, che cadono sulla linea di terra. Dei punti che appartengono al piano bisettore β_1 del primo e terzo diedro, o al piano bisettore β_2 del secondo e quarto diedro, sono uguali i valori assoluti delle quote e degli aggetti; inoltre tenendo conto del verso stabilito per il ribaltamento di π_2 su π_1, i primi

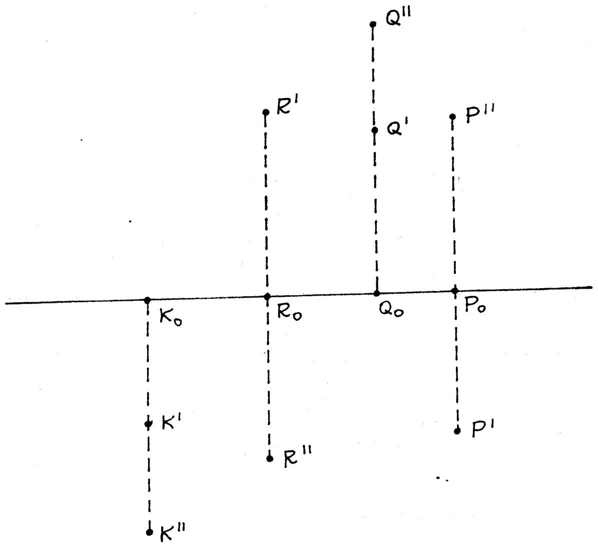

Fig. 3b

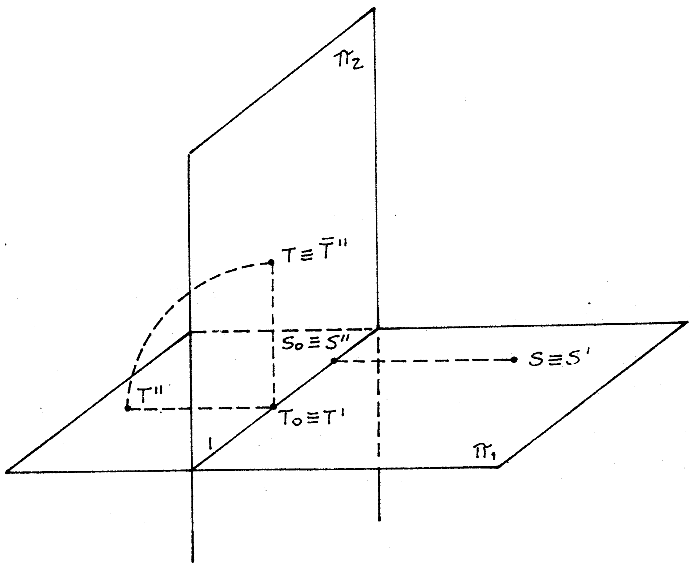

Fig. 4a

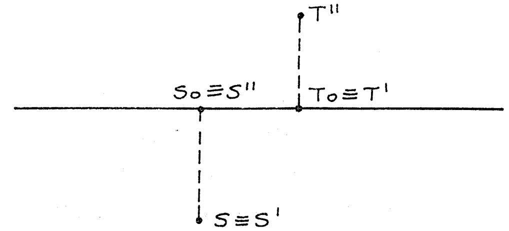

Fig. 4b

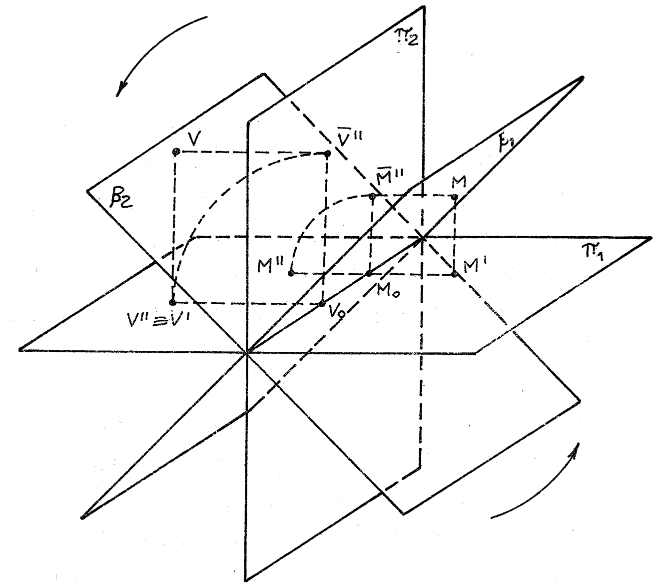

Fig. 5a

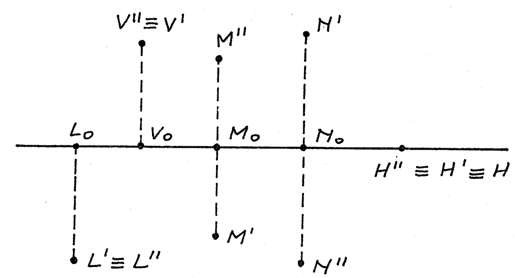

Fig. 5b

hanno le immagini simmetriche rispetto alla linea di terra, i secondi le hanno coincidenti (fig. 5a). Nella fig. 5b sono rappresentati i punti M ed N di β_1, l'uno nel primo, l'altro nel terzo diedro; i punti V ed L di β_2, l'uno nel secondo, l'altro nel quarto diedro. Un punto H, appartenente alla linea di terra, ha entrambe le immagini coincidenti con il punto H stesso.

20. Rappresentazione della retta

Una generica retta r viene proiettata su π_1 dal punto $O_{1\infty}$ nella retta r', e su π_2 dal punto $O_{2\infty}$ nella retta $\overline{r}''$: r' ed $\overline{r}''$ sono dunque le proiezioni ortogonali di r sui piani del riferimento e vengono denominate rispettivamente *prima proiezione* (o *proiezione orizzontale*) e *seconda proiezione* (o *proiezione verticale*) di r. Esse sono le intersezioni con π_1 e π_2 di due piani γ, δ, passanti per r e perpendicolari rispettivamente a π_1 e a π_2.

Quando il piano π_2 viene ribaltato su π_1, la seconda proiezione $\overline{r}''$ si ribalta in r'': le due rette r' ed r'' sono le *immagini* della retta r.

Viceversa, date sul foglio del disegno due qualsiasi rette: r' ed r'', resta determinata una e una sola retta r dello spazio, di cui r' ed r'' sono le immagini. Infatti, mediante il raddrizzamento del piano $\pi_2^* \equiv \pi_1$, r'' assume la posizione $\overline{r}''$ su π_2; il piano γ per r' ortogonale a π_2 e il piano δ per $\overline{r}''$ perpendicolare a π_2 determinano la retta r come loro intersezione.

Dunque:

Ogni generica retta r è rappresentata da due rette, generalmente distinte, r' ed r''. Il simbolo $r\,(r', r'')$ denota la rappresentazione della retta r, mediante le immagini r', r''.

I punti S e T in cui r seca nell'ordine π_1 e π_2 vengono denominati *tracce* della retta r, e precisamente: S, *prima traccia* o *traccia orizzontale*; T, *seconda traccia* o *traccia verticale* di r. E poiché ciascuna retta è determinata da due punti, date le tracce è possibile costruire le immagini della retta e, viceversa, date le immagini ricavare le tracce.

Osservando infatti la fig. 6a, la prima proiezione r' interseca la

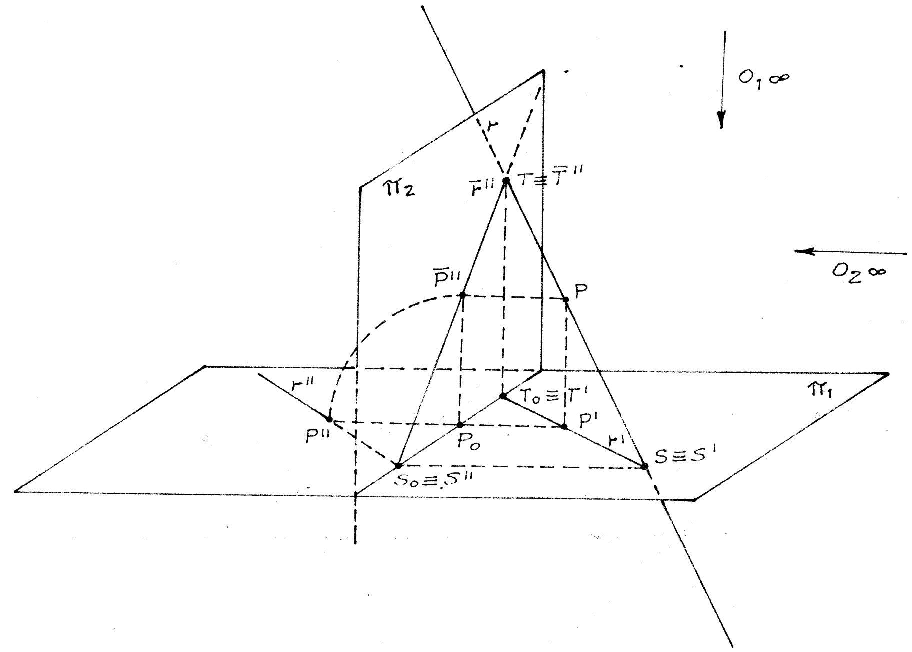

Fig. 6a

linea di terra nel punto $T_0 \equiv T'$, prima immagine della seconda traccia T, questa T è l'intersezione di $\overline{r}''$ con la normale ad l condotta per

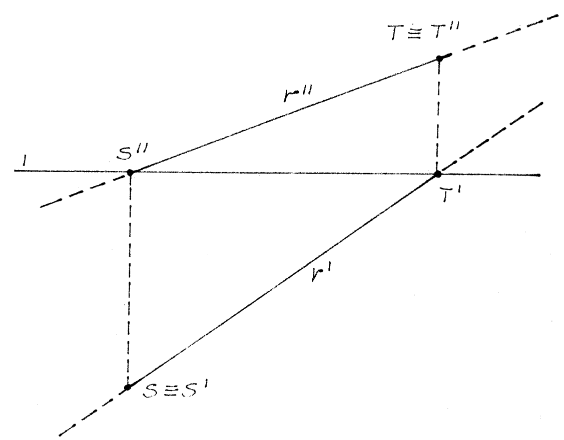

Fig. 6b

$T_0 \equiv T'$: analogamente la seconda proiezione $\overline{r}''$ interseca l in $S_0 \equiv S''$, e il punto S è l'intersezione di r' con la normale ad l condotta per $S_0 \equiv S''$.

Date dunque sul foglio (fig. 6b) le immagini r', r'' di una retta r dello spazio, e detti T′ ed S″ i punti in cui queste secano nell'ordine la linea di terra l, le normali ad l condotte da T′ e da S″, determinano rispettivamente su r'' ed r' i punti T ed S, seconda e prima traccia di r.

Viceversa, date le coppie di punti: S′, S″ e T′, T″, rispettivamente immagini di un punto S di π_1 e di un punto T di π_2, si ottengono le immagini della retta r, di cui S e T sono le tracce, congiungendo S″ con T″ ed S′ con T′.

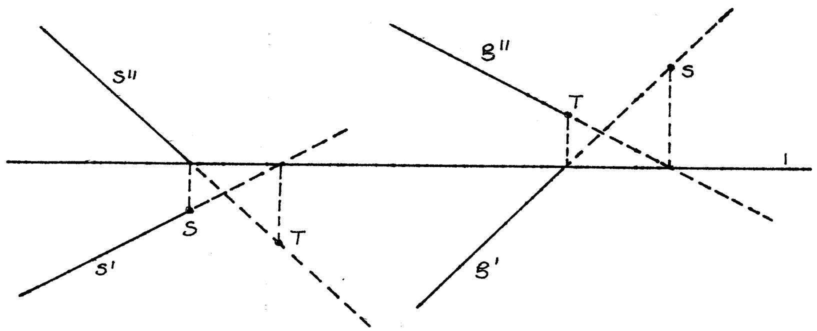

Fig. 7

I segmenti $\overline{S'T'}$ di r' ed $\overline{S''T''}$ di r'', aventi estremi nelle proiezioni omonime delle tracce, rappresentano il segmento della retta r contenuto nel diedro attraversato da r.

Si noti che se la retta interseca π_1 e π_2 nel secondo (nel quarto) diedro, le tracce cadono entrambe al di sopra (al di sotto) della linea di terra l (fig. 7).

Una retta o parallela a π_1, detta anche *retta orizzontale*, ha la seconda proiezione o'' parallela alla linea di terra, e la prima o', parallela alla retta obiettiva o (figg. 8a e 8b); la prima traccia è evidentemente impropria e, dovendo appartenere alla prima immagine di o, coincide col punto improprio S_∞ di o'.

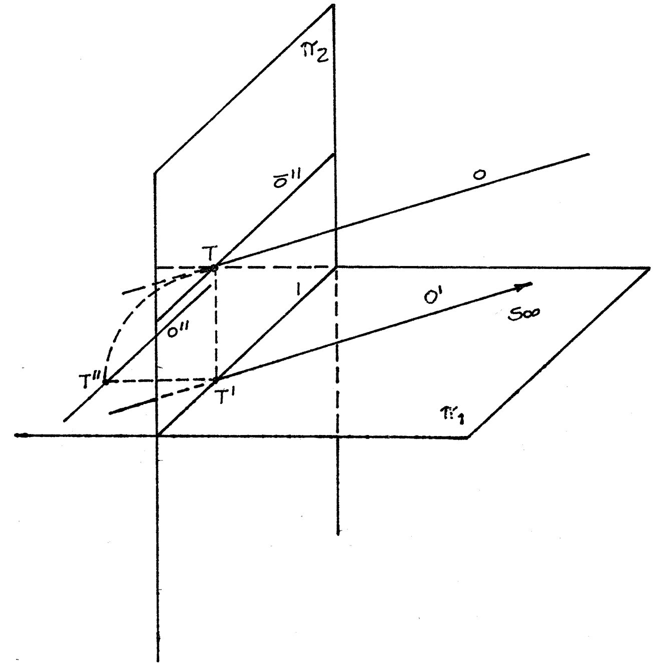

Fig. 8a

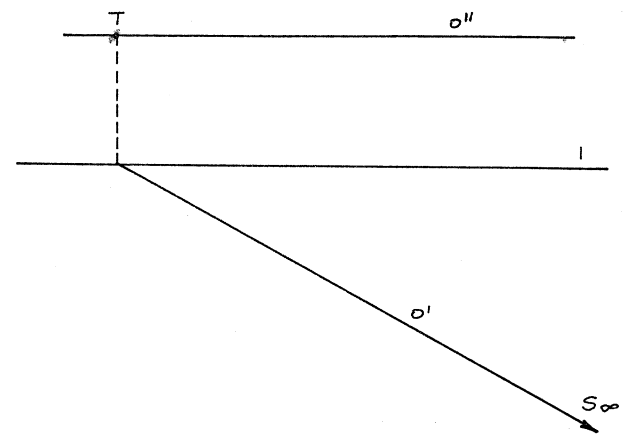

Fig. 8b

Analogamente, una retta f parallela a π_2, detta anche *retta di fronte*, ha la prima proiezione f' parallela ad l e la seconda f'' parallela ad f (figg. 9a e 9b); la seconda traccia di f coincide col punto improprio T_∞ di f''.

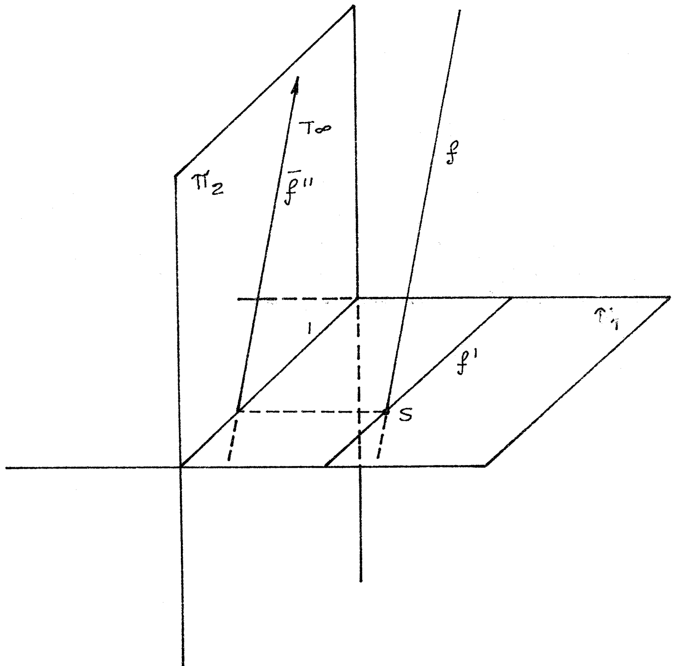

Fig. 9a

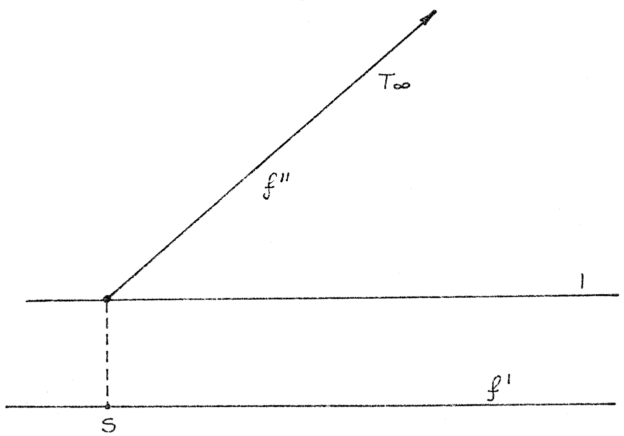

Fig. 9b

Se una retta è parallela sia a π_1 che a π_2, e quindi alla linea di terra l, le immagini sono entrambe parallele ad l e le tracce coincidono col punto improprio della retta l.

Una retta h perpendicolare a π_1, ha la seconda immagine h'' perpendicolare ad l (e parallela ad h), la seconda traccia impropria e la prima proiezione h' ridotta ad un punto coincidente con la prima traccia S; una retta k perpendicolare a π_2 ha la prima immagine k' perpendicolare ad l e la seconda k'' coincidente con la seconda traccia T (figg. 10a e 10b).

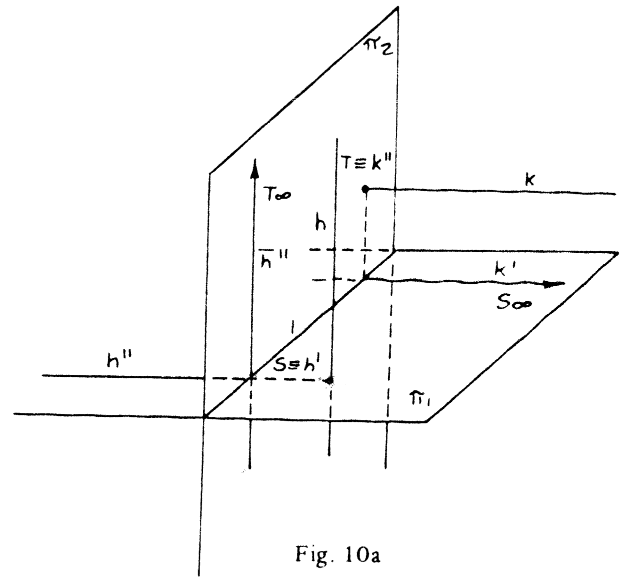

Fig. 10a

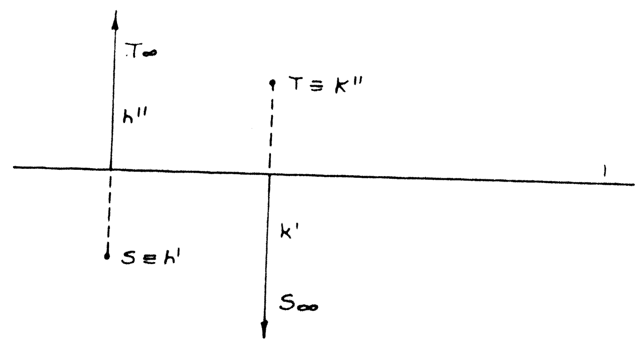

Fig. 10b

Ogni retta m appartenente al primo bisettore β_1, ha le proiezioni simmetriche rispetto ad l; ogni retta n appartenente a β_2 ha le immagini coincidenti; sia m che n hanno le tracce coincidenti nel punto in cui ciascuna di esse interseca l (fig. 11).

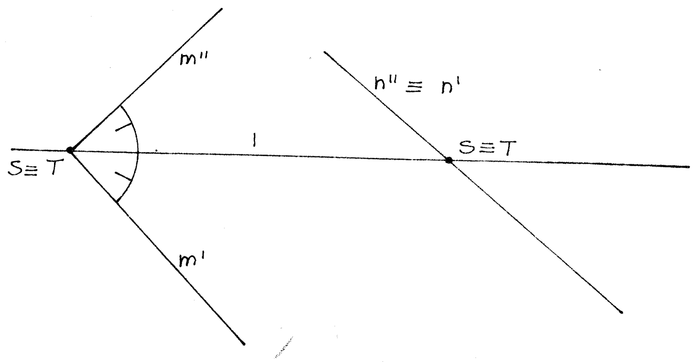

Fig. 11

Ogni retta m appartenente al primo piano bisettore β_1 ha le proiezioni simmetriche rispetto ad l; ogni retta m appartenente a β_2 ha le immagini coincidenti; sia m che n hanno le tracce coincidenti nel punto in cui ciascuna di esse interseca l (fig. 11).

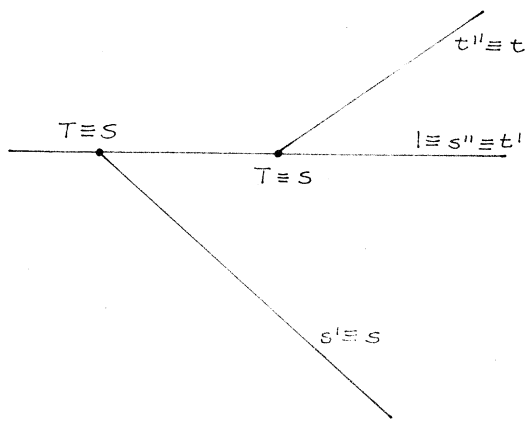

Fig. 12

Se infine una retta q è ortogonale ad l e non è parallela né al piano π_1, né al piano π_2, ha le immagini coincidenti in una retta $q' \equiv q''$ perpendicolare ad l (fig. 13a). In questo caso la retta non è univocamente rappresentata dalle immagini, occorre perciò assegnarne le tracce. Per risolvere

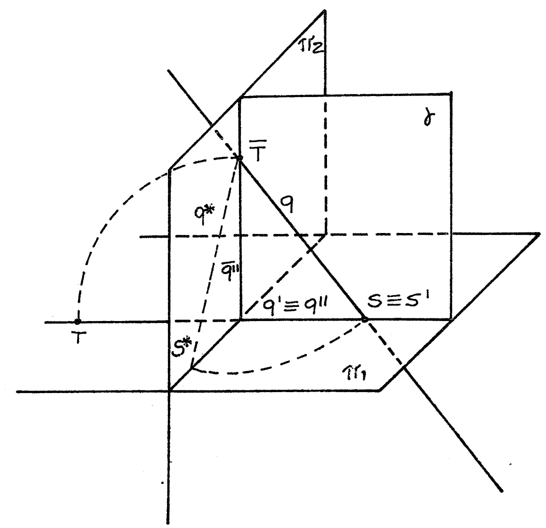

Fig. 13a

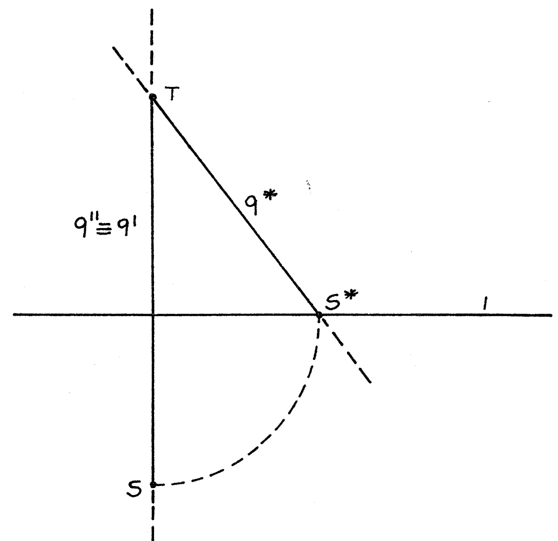

Fig. 13b

alcuni problemi è necessario ribaltare il piano γ per q e ortogonale ad l, su π_2: la retta q^*, ribaltata di q, è quella che congiunge il punto S*, ribaltato di S, con il punto T (fig. 13b).

21. Rappresentazione del piano

Un piano α, non parallelo ad alcuno dei piani di proiezione, interseca rispettivamente π_1 e π_2 secondo due rette proprie s_a e $\overline{t_a}$, passanti per uno stesso punto della linea di terra, cioè il punto comune ai tre piani α, π_1, π_2. Le rette s_a e t_a si dicono *tracce* di α e precisamente: s_a, *prima traccia* o *traccia orizzontale*, e t_a, *seconda traccia* o *traccia verticale* (figg. $14_{a,b}$).

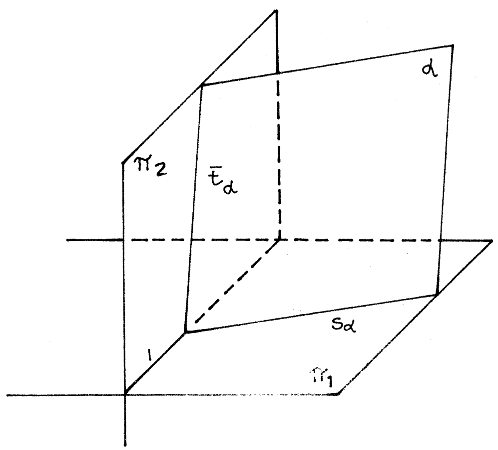

Fig. 14a

Viceversa, date due rette distinte t_a ed s_a, intersecanti la linea di terra in uno stesso punto, queste individuano un piano α: infatti, operato il raddrizzamento di $\pi_2^* \equiv \pi_1$, fino alla posizione di π_2, il piano α è quello individuato dalle rette s_a e $\overline{t_a}$.

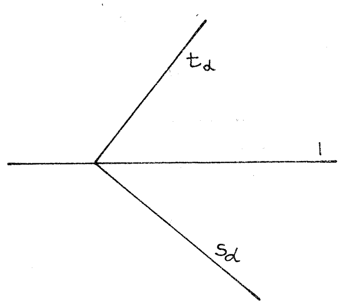

Fig. 14b

Dunque:

Un piano generico α è rappresentato dalle sue tracce.

Se il piano α è parallelo a π_1, la prima traccia coincide evidentemente con la retta impropria di π_1 e la seconda traccia t_a è parallela ad l; analogamente, un piano β, parallelo a π_2, ha la prima

traccia parallela ad l e per seconda la retta impropria di π_2 (figure $15_{a,b}$).

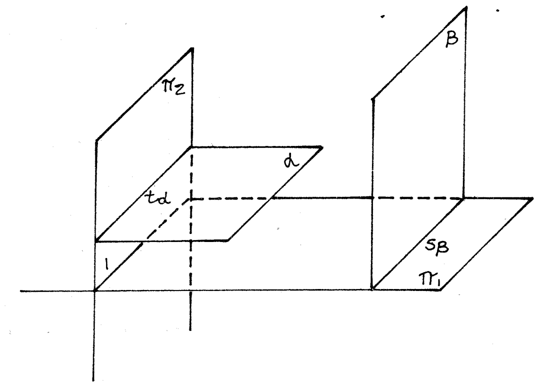

Fig. 15a

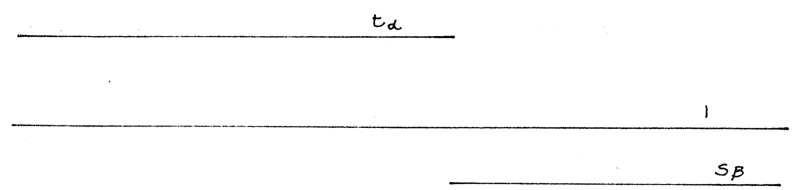

Fig. 15b

Se il piano α è parallelo alla linea di terra, ha le tracce parallele ad l (fig. 16); se inoltre è parallelo a β_2, le sue tracce sono equidistanti da l; se è parallelo a β_1, le tracce coincidono in un'unica retta parallela ad l.

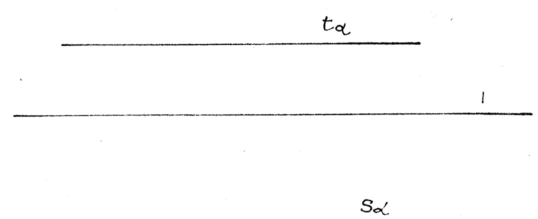

Fig. 16

Se il piano α è perpendicolare a π_1, ha la seconda traccia t_α, perpendicolare ad l; analogamente un piano β, perpendicolare a π_2, ha la prima traccia s_α perpendicolare ad l (figg. 17a e 17b); α e β diconsi *piani proiettanti* (in quanto mediante piani di questo tipo si ottengono le proiezioni di una retta) *rispettivamente in prima e in seconda proiezione.* Se il piano è perpendicolare sia a π_1 che a π_2 (piano di profilo), le tracce coincidono in una retta perpendicolare ad l (cfr. fig. 13a).

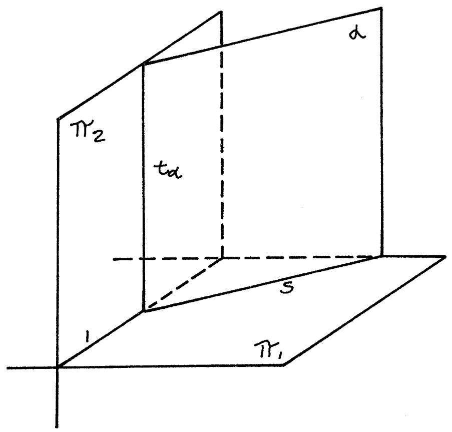

Fig. 17a

Se infine il piano α passa per la linea di terra l, le tracce coincidono con l e non individuano il piano α: questo

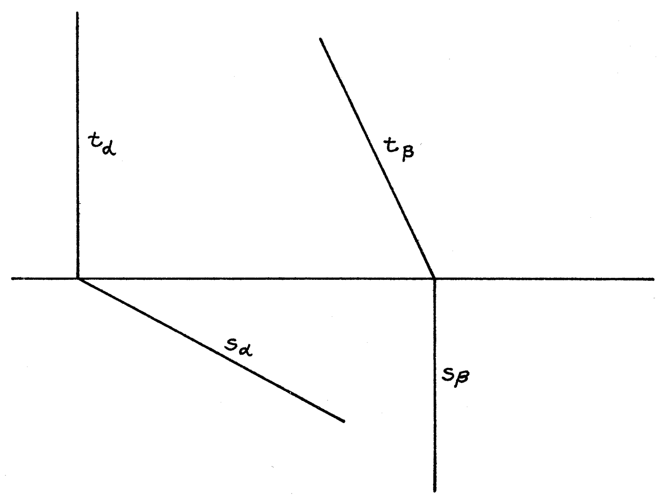

Fig. 17b

infatti ha la retta l in comune con tutti i piani del fascio di asse l; per individuare un tale piano occorre assegnarne un ulteriore punto non appartenente ad l.

Il simbolo $\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$ denota la rappresentazione di un piano α mediante le tracce s_α, t_α.

22. Condizioni di appartenenza

Poiché la prima (seconda) immagine r' (r'') di una retta r è la proiezione ortogonale di r su π_1 (π_2), evidentemente la prima immagine P′ (la seconda immagine P″) di ciascun punto P di r appartiene ad r' (r'').

Ne consegue che:

Un punto appartiene ad una retta se e solo se le immagini del punto appartengono alle immagini omonime della retta.

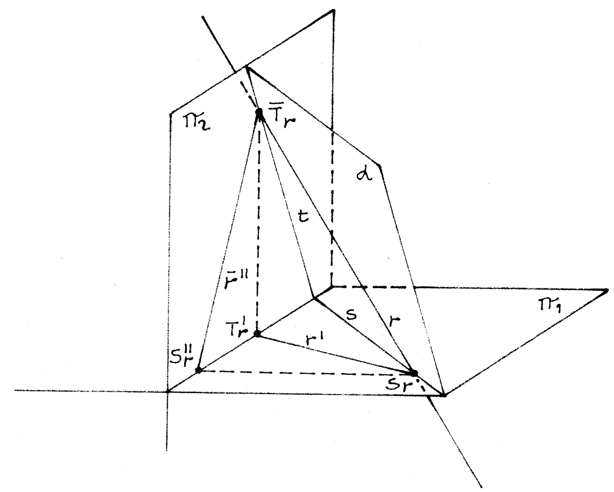

Fig. 18a

Se una retta r appartiene ad un piano $\alpha(s_\alpha, t_\alpha)$, essa interseca π_1 e π_2 rispettivamente in un punto di s_α e in un punto di t_α: tali punti sono le tracce S_r e T_r della retta r. Viceversa, se una retta r (r', r'') è tale che S_r appartiene ad s_α e T_r appartiene a t_α, essa, avendo in comune con α due punti, S_r e T_r, giace su α (figg. 18a e 18b).