RAPPRESENTAZIONI

Importanti in QFT. Spesso si sente affermazione:

"I campi trasformano sotto il gruppo G"

$\rightarrow$ significa che il campo vive in una RAPPRESENTAZ. del gruppo di Lie G. ← gruppo di simmetria (globale o gauge)

Una RAPP. dell'alg. di Lie $\mathcal{G}$ è un insieme di MATRICI $d_R \times d_R$ $\quad t_R^a \quad a = 1, \dots, d = \dim \mathcal{G}$

che soddisfano le stesse regole di commutazione dei generatori T^a di $\mathcal{G}$, cioè

$$[t_R^a, t_R^b] = i f^{abc} t_R^c$$

commutatore $t_R^a t_R^b - t_R^b t_R^a$

Le matrici t_R^a agiscono su uno SPAZIO VETT. V_R d_R-dimensionale. d_R è detto la DIMENSIONE della RAPP. R.

Una RAPP arbitraria può essere messa nella forma diagonale a blocchi (con una scelta opportuna della base di V_R), cioè tutti i generatori sono simultaneamente block-diagonal.

$$T^1 = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, d_R - m \\ \}\, m \end{array}, \quad T^2 = \left(\begin{array}{c|c} & 0 \\ \hline 0 & \end{array} \right) \begin{array}{l} \}\, d_R - m \\ \}\, m \end{array} \dots$$

- Una rapp di questo tipo è detta RIDUCIBILE.

I blocchi corrispondono a RAPP. IRRIDUCIBILI.

- Se $\mathcal{G}$ è SEMISEMPLICE, allora $\forall R$ t^a_R sono traceless

- Fissiamo la normalizzazione di t^a_R.
  - $\mathrm{tr}\, t^a_R$? ma $\mathrm{tr}\, t^a_R = 0$
  - $\mathrm{tr}\, t^a_R t^b_R = D^{ab}$ per un'algebra semplice
    D^{ab} è diagonalizz. e def. positiva $\Rightarrow$

  $\Rightarrow$ D^{ab} può essere portata nella forma

$$\mathrm{tr}\left(t^a_R t^b_R\right) = C(R)\, \delta^{ab} \qquad (*)$$

Fissato $C(R)$ per una particolare rapp. R, $C(R)$ è dato in tutte le altre rapp.

Per $SU(N)$ c'è una rap. molto particolare, detta RAPP. FONDAMENTALE $\dim = N$

$R = N$

Normalizzazione tipicam. scelta è $C(N) = 1/2$

Data rap. dell'ALGEBRA, ho rap. del gruppo

$$\rho_R : G \to \text{matrici } d_R \times d_R \quad \leftarrow \text{t.c. } \rho_R(g_1 \cdot g_2) = \rho_R(g_1)\, \rho_R(g_2)$$
$$g \mapsto \rho_R(g)$$

Siccome $g = e^{i\alpha^a T^a} \longrightarrow \rho_R\left(e^{i\alpha^a T^a}\right) = e^{i\alpha^a t^a_R}$

Dimostriamo che f^{abc} è totalm. antisimm., cioè cambia segno quando due indici vengono scambiati (o più propriamente, facciamo permutazione dispari degli indici abc).

$$[t^a, t^b] = i f^{abc} t^c \quad \Rightarrow \quad f^{abc} = -f^{bac}$$

$$\operatorname{tr}([t^a, t^b] t^d) = i f^{abc} \operatorname{tr}(t^c t^d) = i c(R) f^{abd}$$

$$\parallel$$

$$\operatorname{tr}(t^a t^b t^d - t^b t^a t^d) = \operatorname{tr}(t^d t^a t^b - t^a t^d t^b) = \operatorname{tr}([t^d, t^a] t^b)$$

$$\parallel$$

$$i c(R) f^{dab}$$

$$\Rightarrow \quad f^{abd} = f^{dab} \quad \Rightarrow \quad f^{abd} = f^{dab} = f^{bda}$$

$\Rightarrow f^{abc}$ è inv. per permutazioni cicliche di abc

Sappiamo che f^{abc} è antisimm. per scambio dei primi due indici:

$$\Rightarrow \quad f^{abc} = f^{bca} = -f^{cba} = -f^{acb} \qquad \text{etc.}$$

Qto dimostra che f^{abc} è antisimm. sotto odd permutations.

RAPPRESENTAZIONE CONIUGATA

$v \in V_R$ $\quad v \mapsto e^{i\alpha^a t^a_R}\, v \quad$ ← Trasf. sotto il gruppo

↑ sp. vett. sul campo $\mathbb{C}$

$$v^* \mapsto \underbrace{e^{-i\alpha^a t^{a*}_R}}_{\text{forniscono una RAPP. di } G} v^* \quad \to \quad v^* \in \bar{R} \qquad t^a_{\bar{R}} = -t^{a*}_R$$

importante per Mecc. Quant. ⇝ preserva probab.

Se consideriamo RAP. UNITARIE di G (HERM. di $\mathfrak{g}$)

$$t^a_{\bar{R}} = -t^{a*}_R = -t^{aT}_R$$

$$[-t^{aT}_R, -t^{bT}_R] = t^{aT}_R t^{bT}_R - t^{bT}_R t^{aT}_R = -([t^a_R, t^b_R])^T =$$
$$= -(i f^{abc} t^c_R)^T = i f^{abc}(-t^c_R)^T .$$

Diciamo che una rep. R è equivalente alla sua coniugata $\bar{R}$ se $\exists$ matrice S t.c.

$$t^a_{\bar{R}} = S\, t^a_R\, S^{-1} \qquad (*)$$

- Per rep. UNITARIE, S può essere scelta unitaria

<u>Dim.</u> $\rho_R(g)^* = e^{-i\alpha^a t^{a*}_R} = e^{i\alpha^a t^a_{\bar{R}}} = S\,\rho_R(g)\,S^{-1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow S\,\rho(g) = \rho(g)^* S \overset{\text{rep. unitaria}}{=} \rho(g^{-1})^T S \Rightarrow S = \rho(g)^T S\, \rho(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S^\dagger S = \rho(g)^\dagger S^\dagger \rho(g)^* \rho(g)^T S\, \rho(g) = \rho(g)^{-1} S^\dagger S\, \rho(g) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(g)\, SS^\dagger = SS^\dagger \rho(g) \quad \forall g \Rightarrow SS^\dagger = \lambda \mathbb{1}$$

Normalizzazione di S non modifica $(*)$ → posso scegliere S t.c. $\lambda = 1$. //

• (A) $\Rightarrow$ S è SIMMETRICA o ANTISIMMETRICA

Dim. Dimostriamolo per rap. unitarie:

$$-t_R^{a\,T} = S\, t_R^a\, S^{-1} \Rightarrow t_R^a = -S^{-T} t_R^{a\,T} S^T = S^{-T} S\, t_R^a\, S^{-1} S^T \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S^{-1}S^T)\, t_R^a = t_R^a (S^{-1}S^T) \quad \forall a \overset{\text{lemma di Schur}}{\Longrightarrow}$$

$$\Rightarrow S^{-1}S^T = \lambda \mathbb{1}, \; \lambda \in \mathbb{C} \Rightarrow S^T = \lambda S \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S = (S^T)^T = (\lambda S)^T = \lambda^2 S \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow S^T = \pm S \;//$$

Se S è SIMMETRICA la rap. è detta REALE

Se S è ANTISIMMETRICA la rap. è detta PSEUDO-REALE

Se una rap. ha t_R^a con entrate $\in i\mathbb{R}$ ($\rho_R(g)$ matrici reali)

$\Rightarrow -t_R^{a\,*} = t_R^a \Rightarrow \exists\, S$ che soddisfa (A) e tale

S è $= \mathbb{1}$ (simm.).

Viceversa si può dim. che data rap. REALE, possiamo trovare t_R^a con entrate $\in i\mathbb{R}$.

Dati $v, w \in V_R$ e R rap. reale o pseudoreale

$\Rightarrow$ $v^T \cdot S \cdot w$ è invariante sotto G

Dim. $v^T S w \mapsto v^T \rho(g)^T S\, \rho(g) w = v^T \rho(g^{-1})^* S\, \rho(g) w =$

$$= v^T \rho(g^{-1})^* \rho(g)^* S w = v^T S w. \;//$$

ES. $SU(2)$

$R = \underline{2}$ $\quad t^a_R = \frac{\sigma^a}{2}$ $\quad a = 1, 2, 3$

$t^a_{\bar{R}} = -\frac{(\sigma^a)^T}{2} = (i\sigma^2)\,\frac{\sigma^a}{2}\,(-i\sigma^2)$ $\qquad S = i\sigma^2 = \epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\rightarrow$ PSEUDO-REALE $\Leftarrow$ antisimm.

$\rightsquigarrow$ $\epsilon_{\alpha\beta} V^\alpha W^\beta$ è INVARIANTE

$R = \underline{3}$ $\quad t^a_R$ sono matrici immaginarie $\qquad S_{ij} = \delta_{ij}$

$\rightarrow$ REALE $\Leftarrow$ simmetrica

$\rightsquigarrow$ $\delta_{ij} V^i W^j$ è INVARIANTE

Prodotto scalare in $\mathbb{R}^3$ è inv. sotto rotazioni.

RAPPRESENTAZ. AGGIUNTA (Ad)

$V_R = \mathcal{G}$ Il prodotto di Lie $[\,,\,]$ fornisce un'azione lineare di $\mathcal{G}$ su sé stessa

Prendiamo $t \in \mathcal{G}$, allora $[t, \cdot]$ è una mappa lineare su $\mathcal{G}$

→ può essere rap. da matrici, una volta che scegliamo una base T^a

$$\underbrace{t^a_{Ad}}_{\text{matrice}} \cdot T^b = [T^a, T^b] = i \underbrace{f^{abc}}_{\text{comb. lin. di vett}} T^c$$

$$A \cdot \underline{e_m} = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elem. della matrice} \\ \text{che rapp. } A}}{a_{im}} \underline{e_i}$$

$$V = V_i \underline{e_i}$$

$$(A \cdot V)_j = a_{ji} V_i$$

$$(t^a_{Ad})^{cb} = i f^{abc}$$

f^{abc} sono REALI e ANTISIMM $\Rightarrow -(t^a_{Ad})^T = t^a_{Ad}$

→ REALE

$$\dim Adj = \begin{cases} N^2 - 1 & SU(N) \\ N(N-1)/2 & SO(N) \\ N(N+1)/2 & SP(N) \end{cases}$$

Nota: dim SU(2) = dim SO(3)

→ non è un caso: $\underbrace{\text{le alg. di Lie}}_{\text{l'alg. dei MOMENTI ANGOLARI (generatori delle rotazioni)}}$ sono ISOMORFE

↳ M_x, M_y, M_z hanno regole di comm. di su(2) (PB in mecc. class. com. in " quant.)

Rappresentaz. studiate in corso M.Q.

$R = \underline{1}$ spin = 0

$R = \underline{2}$ spin = 1/2

$R = \underline{3}$ spin = 1

⋮ ⋮

$\Big\}\ s$ ↑ numero cost. in una data rep.

↓

questo numero dà il valore di $\bar{S}^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$ (t_R^a)

In una IRREP $\bar{S}^2 = s(s+1)\hbar \mathbb{1}_R$ → esso COMMUTA con ogni elem. dell'alg., e in partic. comm. con tutti i generatori

CASIMIR OPERATOR

Per ogni rapp. R di $\mathcal{G}$, la matrice

$$T^2 \equiv t_R^a t_R^a \qquad (\text{sommato su } a)$$

commuta con tutti i $t \in \mathcal{G}$.

$$[t_R^b, t_R^a t_R^a] = t_R^a [t_R^b, t_R^a] + [t_R^b, t_R^a] t_R^a =$$

$$= t^a i f^{bac} t^c + i f^{bac} t^c t^a =$$

$$= i t^a t^c (f^{bac} + f^{bca}) = 0$$

T^2 si dice un INVARIANTE dell'alg., prende un valore fissato in ogni IRREP

$$\Rightarrow \quad t^a_R t^a_R = C_2(R)\, \mathbb{1}_R$$

$C_2(R)$ è chiamato QUADRATIC CASIMIR OPERATOR

appare in osservabili di teorie di campo non abeliane

In $R = Adj$

$$i f^{abc}\, i f^{acd} = c_2(G)\, \delta^{bd}$$

$$\rightarrow f^{bac} f^{dac} = c_2(G)\, \delta^{bd}$$

l'invariante $c(R)$, legato alla normalizzazione, può essere derivato se conosciamo $c_2(R)$:

$$\begin{aligned} tr_R\, t^a_R t^a_R &= c_2(R)\, tr_R \mathbb{1}_R = \boxed{c_2(R)\, \dim(R)} \\ &\parallel \\ \delta^{ab}\, tr_R\, t^a_R t^b_R &= c(R)\, \delta^{ab}\delta^{ab} = \boxed{c(R)\, \dim(G)} \end{aligned}$$

ES. $SU(N)$ $\quad c(N) = 1/2$

$$\rightarrow c_2(N) = c(N)\frac{\dim(SU(N))}{\dim(N)} = c(N)\frac{N^2-1}{N} = \frac{N^2-1}{2N}$$

PRODOTTO TENSORE DI RAPP.

Consideriamo lo sp. vett. $V_{R_1} \otimes V_{R_2}$ dove R_1, R_2 sono IRREP

Q.to è lo sp. vett. di una RAPP. che

chiamiamo $R_1 \otimes R_2$ $\rightarrow$ $\dim(R_1 \otimes R_2) = \dim R_1 \cdot \dim R_2$

I generatori sono:

$$t^a_{R_1 \otimes R_2} = t^a_{R_1} \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes t^a_{R_2} \qquad (\circ)$$

In generale $R_1 \otimes R_2$ è RIDUCIBILE :

$$R_1 \otimes R_2 = \bigoplus_i R_i \qquad (*)$$

Casimir op :

$$\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \left(t^a_{R_1}\right)^2 \otimes \mathbb{1}_{R_2} + \mathbb{1}_{R_1} \otimes \left(t^a_{R_2}\right)^2 + $$
$$+ 2\, t^a_{R_1} \otimes t^a_{R_2}$$

Facciamo la traccia ($\mathrm{tr}(A \otimes B) = (\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} B)$ prop. distrib.)

$$\mathrm{tr}\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \dim R_2 \, \mathrm{tr}\left(t^a_{R_1}\right)^2 + \dim R_1 \, \mathrm{tr}\left(t^a_{R_2}\right)^2 =$$
$$= \left[c_2(R_1) + c_2(R_2)\right] \dim R_1 \cdot \dim R_2$$

D'altra parte

$$\mathrm{tr}\left(t^a_{R_1 \otimes R_2}\right)^2 = \sum_i \mathrm{tr}\left(t^a_{R_i}\right)^2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i$$

$$\left(c_2(R_1) + c_2(R_2)\right) \dim R_1 \dim R_2 = \sum_i c_2(R_i) \dim R_i \qquad (\#)$$

Es: $SU(N)$ $\quad R_1 = N \quad R_2 = \bar{N}$

$N \otimes \bar{N} \rightarrow$ dim. di $V_{N\otimes\bar{N}}$ sono matrici $N \times N$

e tali matrici possono essere scritte

come $\quad \underbrace{\alpha \delta^{ij}}_{1} + \underbrace{M^{ij}}_{\text{traceless}} \leftarrow N^2-1$

$t_1^a t_1^a = c_2(1)\, \mathbb{1}_1$, con $t_1^a = 0$ e $\mathbb{1}_1 = 1$

$$N \otimes \bar{N} = 1 \oplus Ad$$

Applichiamo (#) $\quad 2\, \underbrace{c_2(N)}_{\frac{N^2-1}{2N}}\, N^2 = \underbrace{c_2(1)}_{0} \dim(1) + c_2(G) \dim G$

$$\Rightarrow \quad c_2(G) = N \quad \Rightarrow \quad c(N) = N$$