5 ottobre

$X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$, e se $L \in \mathbb{R}$ ed

$f : X \to \mathbb{R}$, abbiamo definito cosa vuole dire

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

In particolare se $\{x_n\}$ è una successione in $\mathbb{R}$ e se $L \in \mathbb{R}$ abbiamo definito cosa vuole dire

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L$$

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad f(n) = x_n$$

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = L \iff \lim_{n \to +\infty} f(n) = L$$

Lemma Sia $a \in \mathbb{R}$ t.c. $|a| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$.
Allora $a = 0$. $\square$

Teorema Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$.
Supponiamo che ℓ_1 ed ℓ_2 siano due numeri
t.c. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2$;

Allora $\ell_1 = \ell_2$.

Dim $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_1$ significa

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon^{(1)} > 0 \text{ t.c. } x > K_\varepsilon^{(1)} \Longrightarrow |f(x) - \ell_1| < \varepsilon}$$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon^{(2)} > 0 \text{ t.c. } x > K_\varepsilon^{(2)} \Longrightarrow |f(x) - \ell_2| < \varepsilon}$$

Fissiamo $\varepsilon > 0$ e sia $K_\varepsilon = \max\{K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}\}$
e sia $x > K_\varepsilon$ $\left(\Rightarrow x > K_\varepsilon^{(1)} \text{ e } x > K_\varepsilon^{(2)}\right)$

$$|\ell_1 - \ell_2| = |(\ell_1 - f(x)) + (f(x) - \ell_2)|$$
$$\leq |\ell_1 - f(x)| + |f(x) - \ell_2|$$
$$= \underbrace{|f(x) - \ell_1|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|f(x) - \ell_2|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

Conclusione: ho fissato $\varepsilon > 0$ ed ho concluso
che $|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon$

cioè

$$\boxed{|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0} \quad (1)$$

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$\boxed{|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0} \quad (2)$$

Fisso $\varepsilon > 0$. Allora $\frac{\varepsilon}{2} > 0 \overset{(1)}{\Longrightarrow} |\ell_1 - \ell_2| < 2\,\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Ho dimostrato che se $\varepsilon > 0$ allora $|\ell_1 - \ell_2| < \varepsilon$, cioè
la (2)

Dal precedente lemma $\ell_1 - \ell_2 = 0 \Longleftrightarrow \ell_1 = \ell_2$

$\square$

$a \in \mathbb{R}$

Supponiamo che $|a| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon > 0$

$|a| < \varepsilon \quad \forall\, \varepsilon \in (0, +\infty)$. $\Rightarrow$ $|a|$ è un minorante della semiretta $(0, +\infty)$

$\Rightarrow \quad |a| \leq \inf(0, +\infty) = 0$

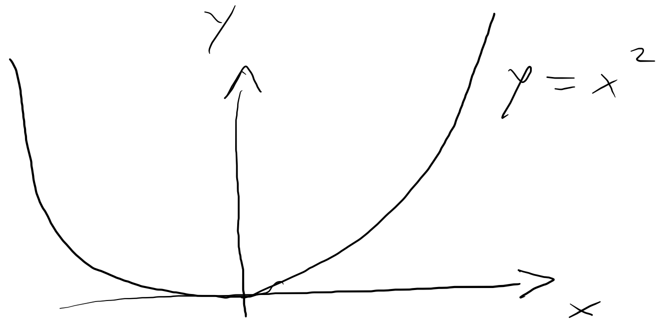
$|a| \leq 0$, D'altra parte $|a| \geq 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$.

E pertanto $\quad 0 \leq |a| \leq 0 \Rightarrow |a| = 0$

$\Rightarrow \quad a = 0$.

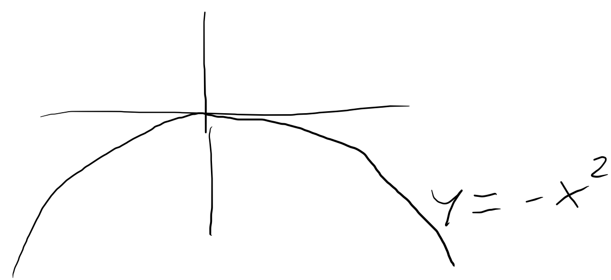
__Terminologia__ Una successione $\{x_n\}$ in $\mathbb{R}$ che abbia limite $\lim_{n \to +\infty} x_n = \ell \in \mathbb{R}$ si dice convergente.

$x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$$

$-x^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\lim_{x \to +\infty} (-x^2) = -\infty$$

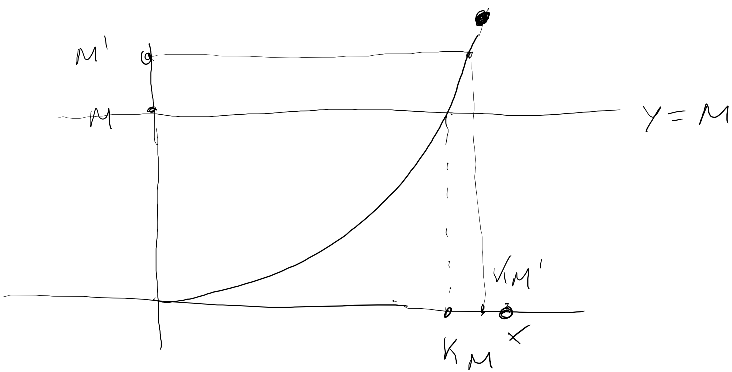
Def $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$.

Diciamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ se

$$\boxed{\forall M > 0 \quad \exists K_M \text{ t.c. } x > K_M \Rightarrow f(x) > M}$$

Es dimostriamo che $\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$x^2 > M$

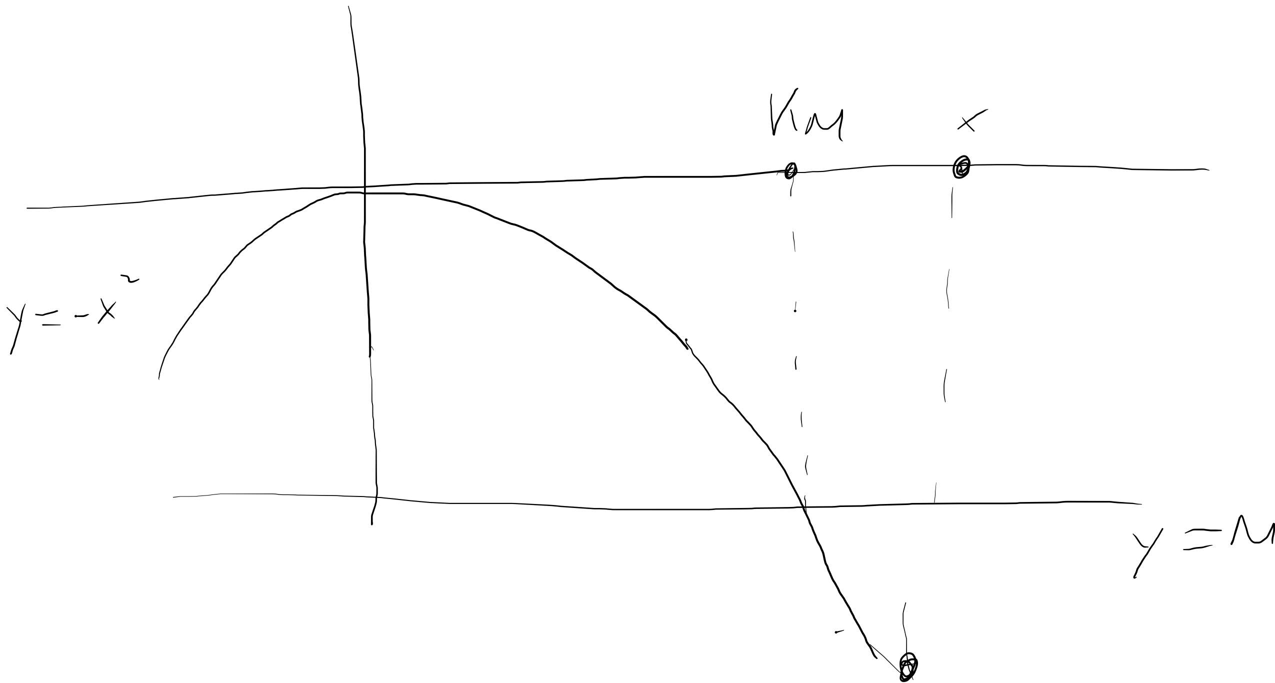


$x^2 > M \Leftrightarrow x > \sqrt{M} = K_M$

$x > K_M (= \sqrt{M}) \Rightarrow x^2 > M$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$, $f : X \to \mathbb{R}$, diciamo che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ se

$\forall M < 0 \quad \exists K_M$ t.c. $x > K_M \Rightarrow f(x) < M$



Def Denoteremo con $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$

$\overline{\mathbb{R}}$ è la retta reale estesa.

Quindi stabiliamo che $a \leq +\infty \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

e che $-\infty \leq a \quad \forall a \in \overline{\mathbb{R}}$

$$+\infty + a = +\infty \qquad \forall \; a > -\infty$$

$$-\infty + a = -\infty \qquad \forall \; a < +\infty$$

$$+\infty \cdot a = \begin{cases} +\infty & \text{se } a > 0 \\ -\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$$-\infty \cdot a = \begin{cases} -\infty & \text{se } a > 0 \\ +\infty & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$+\infty - \infty$ e $\pm\infty \cdot 0$ non sono definiti.

$$\frac{1}{\pm\infty} = 0$$

Teorema (regole dei limiti) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$

e siano $f, g : X \to \mathbb{R}$. Siano

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}} \quad e \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora vale quanto segue.

1) $$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b = \lim_{x \to +\infty} f(x) + \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

eccetto che quando $(a, b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$

2) $$\lim_{x \to +\infty} f(x) \, g(x) = a \, b = \lim_{x \to +\infty} f(x) \cdot \lim_{x \to +\infty} g(x)$$

eccetto quando $(a, b) = \begin{cases} (\pm\infty, 0) \\ (0, \pm\infty) \end{cases}$

3) $$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$$

eccetto quando $b = 0$

e eccetto $(a, b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

$$\frac{+\infty}{+\infty} = +\infty \qquad \frac{1}{+\infty} = +\infty \cdot 0$$

Esempi

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\overset{+\infty}{x^2} + \overset{+\infty}{x^3} + \overset{1}{1} \right) = +\infty + \infty + 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} x = +\infty$$ cioè

$$\forall M > 0 \ \exists K_M \text{ t.c. } x > K_M \Rightarrow x > M.$$

Basta prendere $K_M = M$

$$\lim_{x \to +\infty} x^2 = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^3 = \lim_{x \to +\infty} x \quad x^2 = +\infty$$