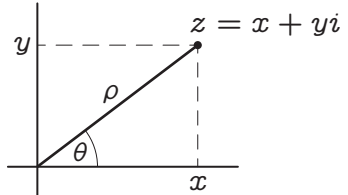


Forma polare di un numero complesso

Dato $z = x + yi \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, con $x, y \in \mathbb{R}$, poniamo

$$\rho := |z|, \quad \arg z = \theta := \begin{cases} \arccos \frac{x}{|z|}, & \text{se } y \geq 0 \\ -\arccos \frac{x}{|z|}, & \text{se } y < 0 \end{cases}$$


Quindi ρ è il modulo di z cioè la distanza tra z e 0 , mentre θ si chiama *argomento* o *anomalia* di z . L'argomento è definito soltanto a meno di multipli interi di 2π e in genere scegliamo il *valore principale*

$$\arg z \in]-\pi, \pi] \quad \text{oppure} \quad \arg z \in [0, 2\pi[.$$

Si ha

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \\ y = \rho \sin \theta \end{cases}$$

Abbiamo quindi che ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$ si può rappresentare in *forma polare* (o *trigonometrica*)

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$$

con $\rho = |z| \geq 0$ e $\theta = \arg z$ (estendiamo la forma polare anche 0 lasciando l'argomento indefinito).

Se $\text{Im } z = y = 0$ allora $z = x$ è un numero reale e si ha

$$|z| = |x|, \quad \arg z = \begin{cases} 0 & \text{se } x > 0 \\ \pi & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Se $\text{Re } z = x = 0$ allora $z = yi$ è un numero immaginario e si ha

$$|z| = |y|, \quad \arg z = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y < 0. \end{cases}$$

Se $\text{Re } z = x \neq 0$ si ha anche

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x} & \text{se } x > 0 \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y \geq 0 \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi & \text{se } x < 0 \text{ e } y < 0. \end{cases}$$

Esempio. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$, $|z| = 1$, $\arg z = \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$$

$w = 1 - \sqrt{3}i$, $|w| = 2$, $\arg z = -\arccos \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3}$

$$1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right).$$

Uguaglianza. Dati due numeri complessi in forma polare

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \rho_1 = \rho_2 \text{ e } \exists k \in \mathbb{Z} \text{ t.c. } \theta_1 - \theta_2 = 2k\pi.$$

La forma polare non è utile per fare l'addizione ma risulta molto utile per fare la moltiplicazione e le potenze (e, come vedremo, anche le radici).

Prodotti. Dati due numeri complessi in forma polare

$$z_1 = \rho_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 \rho_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2)) = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)). \end{aligned}$$

In altre parole nel prodotto si moltiplicano i moduli e si sommano gli argomenti. Posto

$$z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0,$$

si ha anche

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \rho^{-1}(\cos \theta - i \sin \theta) = \\ &= \rho^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \end{aligned}$$

cioè l'inverso si calcola invertendo il modulo e cambiando segno all'argomento. Si ha quindi

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)).$$

Esempio.

$$\begin{aligned} 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) 5\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) &= 15\left(\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right)\right) \\ &= 15\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right) \\ &= 15i. \end{aligned}$$

Potenze. Iterando il ragionamento si ottengono formule per le potenze con esponente intero, per $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \neq 0$ e $n \in \mathbb{Z}$:

$$z^n = \rho^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)).$$

Esempio.

$$(1 - \sqrt{3}i)^3 = 2^3 \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{3}\right) \right) = -8.$$