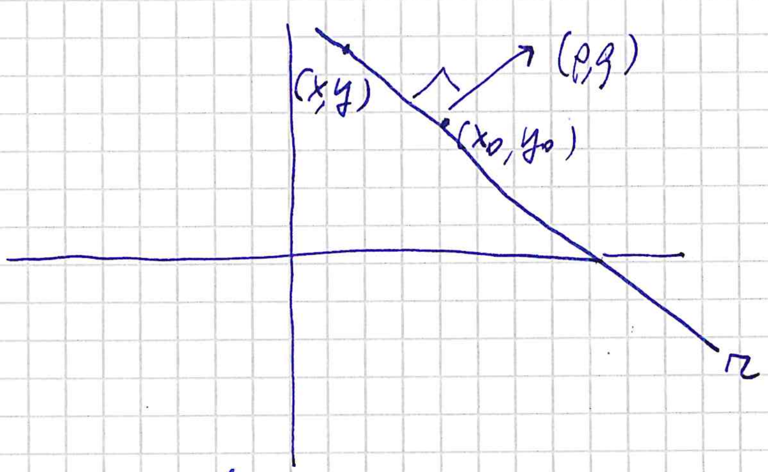
RETTE NEL PIANO

Notazione: In $\mathbb{R}^2$ usiamo le coordinate (x,y) invece di (x_1, x_2).

Per determinare una retta abbiamo bisogno di un suo punto (x_0, y_0) e di un vettore (p, q) che indichi la direzione ortogonale a quella della retta.



La retta r allora sarà

$$r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-x_0, y-y_0) \cdot (p,q) = 0 \}$$

sviluppando i calcoli si ha

$$p(x-x_0) + q(y-y_0) = 0$$

$$px + qy + (-px_0 - qy_0) = 0$$

ovvero la retta è data dai punti che soddisfano un'equazione della forma

$$ax + by + c = 0$$

Se la retta passa per l'origine, l'equazione è $ax + by = 0$

Se $b \neq 0$, si può esprimere y in funzione di x, $y = -\frac{a}{b} - c$

Viceversa, se ho un'equazione del tipo

$ax + by + c = 0$, e se (x_0, y_0) soddisfa tale equazione, allora l'equazione equivale a

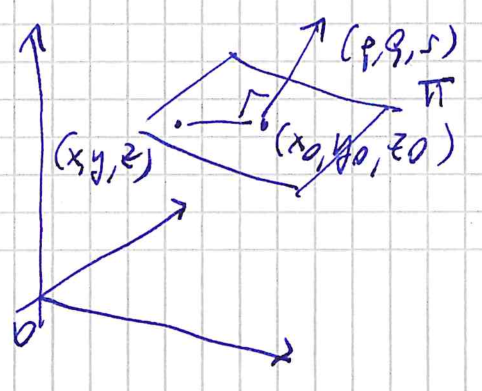
$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$$

e quindi (a, b) individua la direzione ortogonale alla retta.

PIANI NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

Anche qui indichiamo le coordinate con (x, y, z) invece che (x_1, x_2, x_3).

Un piano è determinato da un suo punto (x_0, y_0, z_0) e da un vettore (p, q, s) che indichi la direzione ortogonale al piano



il piano π allora sarà :

$$\pi = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-x_0, y-y_0, z-z_0)\cdot(p,q,s)=0\}$$

da cui

$$p(x-x_0) + q(y-y_0) + s(z-z_0) = 0$$

$$px + qy + sz + (-px_0 - qy_0 - sz_0) = 0$$

ovvero il piano è dato dai punti che soddisfano un'equazione della forma

$$ax + by + cz + d = 0 .$$

se il piano passa per l'origine, l'equazione diventa

$$ax + by + cz = 0$$

Viceversa, se ho un'equazione della forma $ax + by + cz + d = 0$ e se (x_0, y_0, z_0) soddisfa tale equazione, allora l'equazione equivale a

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(y-z_0) = 0$$

e quindi (a,b,c) individua la direzione ortogonale alla retta.

RETTE NELLO SPAZIO $\mathbb{R}^3$

Se ho due piani

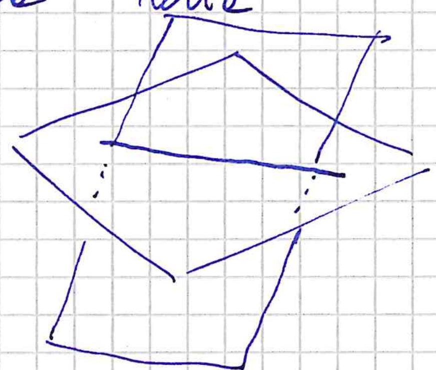
$$\alpha : ax+by+cz+d=0$$
$$\alpha' : a'x+b'y+c'z+d'=0$$

le direzioni ortogonali sono rispettivamente

$$\vec{n} = (a,b,c)$$
$$\vec{n}' = (a',b',c')$$

Se $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ sono uno multiplo dell'altro, allora i piani sono paralleli e quindi o coincidono o hanno intersezione vuota.

Se $\vec{n}$ e $\vec{n}'$ non sono uno multiplo dell'altro, allora α e α' si intersecano formando una retta



$$r : \begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d=0 \end{cases}$$

SPAZI VETTORIALI ASTRATTI

Sia V un insieme non vuoto. Si dice che V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ $\iff$ in V è definita una somma $+$, e inoltre è definita una "moltiplicazione per uno scalare" ovvero una funzione da $\mathbb{R}\times V \to V$, tali che:

1) $u+v = v+u \quad \forall u,v \in V$

2) $u+(v+w) = (u+v)+w \quad \forall u,v,w \in V$

3) $\exists\ 0 \in V$ t.c. $u+0 = u \quad \forall u \in V$

4) $\forall u \in V \ \exists -u \in V$ t.c. $u+(-u) = 0$

5) $1v = v \quad \forall v \in V$

6) $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$

7) $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v \quad \forall \lambda,\mu \in \mathbb{R}\ \forall v \in V$

8) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}\ \forall u,v \in V$

ESEMPI

$V = \mathbb{R}^n$, $\quad V = C([a,b]) = \{$funzioni continue su $[a,b]\}$

$V = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\} = \{$successioni numeriche$\}$.

SOTTOSPAZI DI $\mathbb{R}^n$

Sia $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \neq \emptyset$. V si dice sottospazio di $\mathbb{R}^n$ $\Longleftrightarrow$ la restrizione di $+$ e della moltiplicazione per uno scalare a V forniscono V di una struttura di spazio vettoriale.

Ciò equivale a dire che

1) $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$

2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \in V \Longrightarrow \lambda u \in V$

Si noti che se V è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$ e se $v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \in V$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, allora

$$\lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} \in V$$

$\hookrightarrow$ si chiama combinazione lineare di $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$.

<u>OSS.</u> $\{0\}$ e $\mathbb{R}^n$ sono sottospazi di $\mathbb{R}^n$.

<u>OSS.</u> Le rette passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^2$.
I piani passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

<u>OSS.</u> L'intersezione di due sottospazi è sempre un sottospazio. Quindi le rette passanti per l'origine sono sottospazi di $\mathbb{R}^3$.

In generale, in $\mathbb{R}^n$, se considero k equazioni

$$S \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{k1}x_1 + \dots\dots\dots + a_{kn}x_n = 0 \end{cases}$$

L'insieme $V = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{soddisfano } (S)\}$

è un sottospazio di $\mathbb{R}^n$

(È l'intersezione di k "iperpiani").

C'è un altro modo per costruire sottospazi.
Dati $v^{(1)}, v^{(2)}, \dots, v^{(k)} \in \mathbb{R}^n$

Si costruisce $\quad \text{span}\langle v^{(1)}, \dots, v^{(k)} \rangle :=$

$$= \{ \lambda_1 v^{(1)} + \dots + \lambda_k v^{(k)} \mid \lambda_i \in \mathbb{R}\ \forall i \}$$

si chiama <u>sottospazio generato da $v^{(1)}, \dots, v^{(k)}$</u>.