Esercizi Geometria 1
Foglio 2

1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Si dimostrino, usando gli assiomi di spazio vettoriale $V1, V2, \dots, V8$, le seguenti proprietà:

   (a) per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ si ha
   $$0 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0},$$
   dove $0 \in \mathbb{K}$ indica l'elemento neutro rispetto alla somma in $\mathbb{K}$, e $\mathbf{0} \in V$ indica il vettore nullo, cioè l'elemento neutro rispetto alla somma in V.

   (b) per ogni $t \in \mathbb{K}$ si ha
   $$t \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

   (c) In V esiste un unico vettore nullo.

   (d) Ogni vettore $\mathbf{v}$ ha un unico opposto.

   (e) Per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ si ha
   $$(-1) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{v},$$
   dove $1 \in \mathbb{K}$ denota l'elemento neutro per il prodotto in $\mathbb{K}$, -1 il suo opposto e $-\mathbf{v}$ l'opposto di $\mathbf{v}$.

2. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}\} = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ con la somma e il prodotto per un numero reale definiti a lezione; si verifichi quali dei seguenti insiemi sono dei sottospazi vettoriali.

   (a) $W_1 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f(x) \neq 0 \forall x \in \mathbb{R}\}$;
   (b) $W_2 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f(0) = 0\}$;
   (c) $W_3 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ invertibile}\}$;
   (d) $W_4 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ continua}\}$;
   (e) $W_5 = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,|\, f \text{ derivabile}\}$.

3. Sia V uno spazio vettoriale, siano W_1 e W_2 due sottospazi vettoriali di V. Si dimostri che $W_1 \cup W_2$ è un sottospazio vettoriale di V se e solo $W_1 \subseteq W_2$ oppure $W_2 \subseteq W_1$.