

Radici di un numero complesso

Caso reale.

Def. Dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, la *radice n -esima* di numero reale $\rho \geq 0$ è l'unico numero reale $u \geq 0$ t.c. $u^n = \rho$. Si scrive $u = \sqrt[n]{\rho}$, o anche $\sqrt{\rho}$ per $n = 2$.

Quindi, ad es., si ha $\sqrt{4} = 2$, ma non è corretto scrivere $\sqrt{4} = -2$ e nemmeno $\sqrt{4} = \pm 2$.

Caso complesso. Dato $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) \in \mathbb{C}$ e dato $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vogliamo trovare tutte le *radici n -esime complesse* di z , cioè i numeri complessi $w \in \mathbb{C}$ t.c.

$$w^n = z.$$

Se $z = 0$ allora evidentemente $w = 0$ è l'unica radice n -esima di 0. Se $z \neq 0$, determiniamo tutte le radici in forma polare

$$w = r(\cos \psi + i \sin \psi)$$

$$w^n = r^n(\cos(n\psi) + i \sin(n\psi)) \Leftrightarrow$$

$$r^n = \rho, \quad n\psi = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow$$

$$r = \sqrt[n]{\rho}, \quad \psi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Quindi il modulo di w è la radice n -esima del modulo di z mentre $\arg w$ assume più valori $\psi_0, \psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ in corrispondenza di $k = 0, 1, \dots, n-1$ (risp.). Tuttavia $\psi_n = \psi_0 + 2\pi$, e così di seguito i valori successivi si ripetono a meno di multipli interi di 2π . Si ha quindi che le radici n -esime di $z \neq 0$ sono esattamente n :

$$w_0 = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$

$$w_1 = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{n} \right)$$

$$\vdots$$

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right).$$

Hanno lo stesso modulo $\sqrt[n]{\rho}$ e due argomenti consecutivi differiscono di

$$\psi_{k+1} - \psi_k = \frac{2\pi}{n}$$

valore indipendente da k . Pertanto le radici n -esime di $z \neq 0$ sono i vertici di un n -gono regolare di raggio $\sqrt[n]{\rho}$ e si trovano sulla circonferenza di centro l'origine e raggio $\sqrt[n]{\rho}$.

Radici dell'unità. Definiamo

$$S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

come l'insieme dei punti $z = x + yi \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ t.c. $|z|^2 = x^2 + y^2 = 1$. In altre parole S^1 è la circonferenza unitaria del piano con centro l'origine.

Oss. $z \in S^1 \Rightarrow z^{-1} = \bar{z} \in S^1$. Infatti $|z|^2 = z\bar{z} = 1$.

Ogni punto $z \in S^1$ si può scrivere come

$$z = \cos \theta + i \sin \theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Le radici n -esime di 1 sono date dalle formule precedenti per $\rho = 1$ e $\theta = 0$:

$$w_0 = 1$$

$$w_1 = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$w_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$$

$$\vdots$$

$$w_{n-1} = \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{2(n-1)\pi}{n}.$$

Quindi $w_k \in S^1$ per $k = 0, 1, \dots, n-1$. Eseguiamo alcuni calcoli.

$$\boxed{n=2} \quad w_0 = 1, \quad w_1 = -1.$$

$$\boxed{n=3} \quad w_0 = 1, \quad w_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$w_2 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \bar{w}_1 = w_1^{-1}.$$

Vertici di un triangolo equilatero.

$$\boxed{n=4} \quad w_0 = 1, \quad w_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i, \quad w_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1,$$

$$w_3 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i = \bar{w}_1 = w_1^{-1}.$$

Vertici di un quadrato.

Oss. 1 è radice n -esima di 1.

w_k radice n -esima di 1 $\Rightarrow w_k^{-1}$ radice n -esima di 1. Infatti

$$(w_k^{-1})^n = (w_k^n)^{-1} = 1.$$

w_j, w_k radici n -esime di 1 $\Rightarrow w_j w_k$ radice n -esima di 1. Infatti

$$(w_j w_k)^n = w_j^n w_k^n = 1.$$

Quindi l'insieme delle radici n -esime di 1 ha n elementi ed è chiuso rispetto a moltiplicazione e inversione. Si dice che forma un *gruppo*.

Oss. Per le radici n -esime di 1 si ha

$$w_k = w_1^k.$$

Cioè il gruppo delle radici n -esime di 1 è *ciclico*, ovvero è generato da un elemento. Le radici n -esime di 1 che generano tutte le radici n -esime mediante potenze (come w_1) sono dette *radici n -esime primitive* di 1. Si può dimostrare che w_k è una radice n -esima primitiva di 1 $\Leftrightarrow \text{MCD}(k, n) = 1$. In particolare se n è *primo* tutte le radici n -esime di 1 tranne 1 sono primitive.

Spazi vettoriali complessi numerici

Per ogni $n \in \mathbb{N}$, in analogia con $\mathbb{R}^n$, possiamo definire

$$\mathbb{C}^n \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\mathbb{C} \times \cdots \times \mathbb{C}}_{n \text{ volte}} = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}\}.$$

Per definizione poniamo anche $\mathbb{C}^0 = \mathbb{R}^0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0\}$. Si ha $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$. Gli elementi di $\mathbb{C}^n$ sono chiamati vettori (complessi), e li scriveremo come vettori riga o vettori colonna a seconda della convenienza del momento.

Su $\mathbb{C}^n$ definiamo l'addizione componente per componente e la moltiplicazione per scalari complessi, analogamente al caso reale:

$$(w_1, \dots, w_n) + (z_1, \dots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} (w_1 + z_1, \dots, w_n + z_n)$$

$$\alpha(z_1, \dots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha z_1, \dots, \alpha z_n)$$

$$\forall (w_1, \dots, w_n), (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n, \forall \alpha \in \mathbb{C}.$$

Def. $\mathbb{C}^n$ con queste operazioni di addizione e moltiplicazione scalare è detto *spazio vettoriale complesso numerico di dimensione n* .

L'addizione è associativa e commutativa dato che queste proprietà valgono su $\mathbb{C}$ e inoltre il *vettore nullo*

$$0_{\mathbb{C}^n} \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{(0, \dots, 0)}_{n \text{ volte}}$$

è elemento neutro per l'addizione (spesso lo indicheremo con 0).

$\forall (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ definiamo il *vettore opposto* come

$$-(z_1, \dots, z_n) \stackrel{\text{def}}{=} (-z_1, \dots, -z_n)$$

e si ha

$$(z_1, \dots, z_n) - (z_1, \dots, z_n) = 0_{\mathbb{C}^n}.$$

Matrici

Def. Dati due numeri positivi $m, n \in \mathbb{N}$, una *matrice* di tipo $m \times n$ è una tabella di numeri reali o complessi con m righe e n colonne. Se $m = n$ la matrice è detta *quadrata*. I numeri che formano la matrice sono detti *entrate* o *elementi*.

Una matrice quadrata $n \times n$ è detta anche matrice quadrata di ordine n .

Esempio.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3 .

L'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate reali si indica con $M_{m,n}(\mathbb{R})$ o anche $\mathbb{R}^{m \times n}$. Analogamente l'insieme delle matrici $m \times n$ a entrate complesse si indica con $M_{m,n}(\mathbb{C})$ o anche $\mathbb{C}^{m \times n}$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n si indica con $M_n(\mathbb{R}) = M_{n,n}(\mathbb{R})$ e similmente per quelle complesse si usa la notazione $M_n(\mathbb{C}) = M_{n,n}(\mathbb{C})$. Chiaramente $M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$.

Esempio.

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -1 + 3i & -1 + 7i \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

Le entrate di una matrice $m \times n$ si numerano a partire da quella più in alto a sinistra, mediante una coppia di indici (i, j) con $i \in \{1, \dots, m\}$ (indice di riga) e $j \in \{1, \dots, n\}$ (indice di colonna). Quindi i numera le righe dall'alto verso il basso, e j numera le colonne da sinistra verso destra. Una matrice indicata con A avrà quindi le entrate indicate con A_{ij} o a_{ij} .

Esempio. Per la matrice A del primo esempio si ha $A_{11} = 3$, $A_{13} = -5$, $A_{21} = 0$, $A_{23} = 4$.

Una matrice A di tipo $m \times n$ la cui generica entrata sia un numero a_{ij} si indica con $A = (a_{ij})$.

Addizione. Nel seguito indicheremo con $\mathbb{K}$ uno dei campi $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Date $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *somma*

$$A + B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij} + b_{ij})$$

come la matrice $m \times n$ ottenuta da A e B sommando le entrate corrispondenti.

Moltiplicazione scalare. Dati $\alpha \in \mathbb{K}$ e $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ definiamo la *moltiplicazione scalare*

$$\alpha A \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha a_{ij})$$

come la matrice $m \times n$ ottenuta da A moltiplicando tutte le entrate per il numero α .