Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 2

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Supponiamo che $\mathcal{B}$ sia base per la topologia di X. Per ogni $x \in X$ definiamo

$$\mathcal{B}_x := \{B \in \mathcal{B} \mid x \in B\}.$$

Dimostrare che $\mathcal{B}_x$ è base di intorni di x in X.

2) Dati sottospazi $A \subset Y \subset X$ dimostrare che A è chiuso in $Y \Leftrightarrow \exists\, B \subset X$ chiuso in X t.c. $A = B \cap Y$.

3) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y aperto in X, dimostrare che Z aperto in $Y \Leftrightarrow Z$ aperto in X.

4) Dati $Z \subset Y \subset X$ sottospazi topologici di X con Y chiuso in X, dimostrare che Z chiuso in $Y \Leftrightarrow Z$ chiuso in X.

5) Dato il sottospazio topologico $A \subset X$, dimostrare che

   (a) A aperto in $X \Leftrightarrow i_A : A \hookrightarrow X$ applicazione aperta.

   (b) A chiuso in $X \Leftrightarrow i_A : A \hookrightarrow X$ applicazione chiusa.

6) Sia (Y, d) uno spazio metrico e X uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall\, x_0 \in X$, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x_0 t.c.

$$x \in U \;\Rightarrow\; d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon.$$

7) Sia (X, d) uno spazio metrico e Y uno spazio topologico. Dimostrare che $f : X \to Y$ è continua sse $\forall\, x_0 \in X$, $\forall\, V \subset Y$ intorno aperto di $f(x_0)$, $\exists\, \delta > 0$ t.c.

$$d(x, x_0) < \delta \;\Rightarrow\; f(x) \in V.$$

8) Sia X uno spazio topologico e siano $f, g : X \to R$ continue. Dimostrare che le funzioni $f + g$, fg e $\frac{f}{g}$ (quest'ultima definita nell'aperto $U : g(x) \neq 0$) sono continue.

9) Sia $f : X \to Y$ omeo e $A \subset X$. Dimostrare che $f_{|A} : A \to f(A)$ omeo.

10) Sia $\Gamma \subset R^2$ un'ellisse. Dimostrare che $\Gamma \cong S^1$.