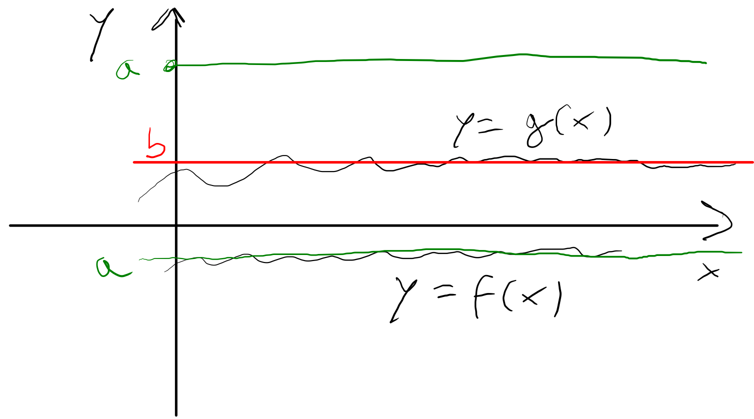
9 Ottobre

Teorema (del confronto) Supponiamo che $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$ e che $f, g : X \to \mathbb{R}$ tali che $f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in X$; $\exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$; $\exists \lim_{x \to +\infty} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $a \leq b$.



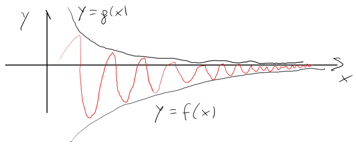
Teorema (dei carabinieri). $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$,

$f, h, g : X \to \mathbb{R}$. Supponiamo che:

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x) \qquad \forall x \in X;$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Allora $\lim_{x \to +\infty} h(x) = L$.



Dim Supponiamo che $L \in \mathbb{R}$.

Allora

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon^{(1)} \text{ t.c. } x > K_\varepsilon^{(1)} \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

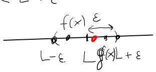
$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon^{(2)} \text{ t.c. } x > K_\varepsilon^{(2)} \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Consideriamo un $\varepsilon > 0$ e introduciamo

$$K_\varepsilon = \max\{K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}\}$$

Osserviamo $|g(x) - L| < \varepsilon \iff -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon \iff$

$$\iff L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$



Analogamente $|f(x) - L| < \varepsilon \iff L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$.

Per $x > K_\varepsilon \left(= \max\{K_\varepsilon^{(1)}, K_\varepsilon^{(2)}\}\right)$

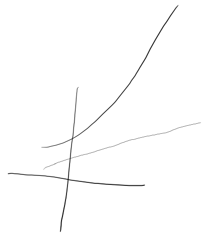
$$L - \varepsilon < f(x) \leq h(x) \leq g(x) < L + \varepsilon \Longrightarrow$$

$$x > K_\varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to +\infty} h(x) = L$$

$b > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$$



Scriviamo b nella forma

$$b = 1 + a$$

$$b > 1 \iff a > 0$$

$$b^n = (1+a)^n \geq 1 + na \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to +\infty} b^n = +\infty$$

$b > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty \qquad \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$b > 1 \Rightarrow \sqrt{b} > 1 \Rightarrow$$

$$(1+a)^n > 1 + na$$

$$\sqrt{b} = 1 + a \quad \text{con} \quad a > 0$$

$$\frac{b^n}{n} = \frac{\left(\left(\sqrt{b}\right)^2\right)^n}{n} = \frac{\left((1+a)^2\right)^n}{n} = \frac{\left((1+a)^n\right)^2}{n}$$

$$\geq \frac{(1+na)^2}{n} = \frac{1 + 2na + a^2 n^2}{n} \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 2na + a^2 n^2}{n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{a^2 n^{\cancel{2}}}{\cancel{n}} = +\infty$$

1) Dimostrare che per $b > 1$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^2} = +\infty$$

2) Dimostrare che per ogni $N \geq 3$ e per $b > 1$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b^n}{n^N} = +\infty .$$

Sia $b > 0$. Allora $\lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

Per $b = 1$ è ovvio perché $b^{\frac{1}{n}} = 1$ $\lim_{n \to +\infty} 1^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} 1 = 1$

Sia ora $b > 1$.

$$b > 1 \Rightarrow b^{\frac{1}{n}} > 1 \quad \forall \quad n \geq 1.$$

$$b^{\frac{1}{n}} > 1 \iff b^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n \quad \text{con} \quad a_n > 0$$

e

$$\lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1 \iff \lim_{n \to +\infty} (1 + a_n) = 1 \iff \boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0}$$

$$b^{\frac{1}{n}} = 1 + a_n$$

$$b = (1 + a_n)^n \geq 1 + n a_n$$

$$b \geq 1 + n a_n \iff a_n \leq \frac{b-1}{n}$$

$$0 < a_n \leq \frac{b-1}{n}$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$

$$0 \qquad 0$$

se $b > 1$

Per i Carab. $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0} \iff \lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

$0 < b < 1$ voglio $\lim_{n \to +\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$

$b^{-1} > 1$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{b^{-\frac{1}{n}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(b^{-1})^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{1} = 1$$

Def (di o piccolo) Dati $X \subseteq \mathbb{R}$ $\sup X = +\infty$ e date $f(x)$ e $g(x)$ su $X \longrightarrow \mathbb{R}$ scriviamo che

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{se} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Es 1) Se $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{1} = 0$ Allora si scrive

$$f(x) = o(1).$$

2) $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^{100}}{2^n} = 0$$

$$n^{100} = o(2^n)$$

Def $X \subseteq \mathbb{R}$ ed $f : X \to \mathbb{R}$. La funzione f si dice crescente (strettamente crescente) se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ $\left(f(x_1) < f(x_2) \right)$

La funzione f si dice decrescente (strettamente decrescente) se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

$$\left(f(x_1) > f(x_2) \right)$$

Una funzione che sia una funzione crescente o una funzione decrescente viene detta funzione monotona.

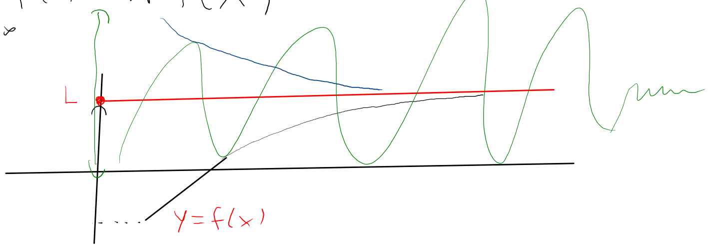
Teor $X \subseteq \mathbb{R}$, $\sup X = +\infty$ ed $f: X \to \mathbb{R}$ monotona. Allora $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ esiste ed in particolare:

1) se f è crescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \sup \underbrace{\{ f(x) : x \in X \}}_{f(X)} = \sup f(X)$$

2) se f è decrescente

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \inf f(X)$$



Esempio $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}_{n \geq 1}$ è una successione crescente

gli elementi della successione sono compresi tra 2 e 3

e il limite $\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ numero di Neper

$e = 2,\cancel{7}\cancel{1}8 \ldots$

e^x $\lg x$

Dim del teorema nel caso di $\sup f(X) < +\infty$

e per f crescente.

Poniamo $S \doteq \sup f(X) = \sup\{f(x) : x \in X\}$

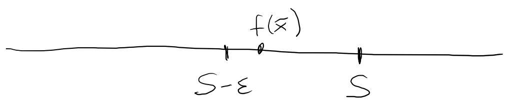
voglio dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = S$, cioè

che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists K_\varepsilon$ t.c. $x > K_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - S| < \varepsilon$

$$\Updownarrow$$

$$S - \varepsilon < f(x) < S + \varepsilon$$

Fissiamo un $\varepsilon > 0$. So che considerato $S - \varepsilon$



$\exists\ \bar{x}_\varepsilon \in X$ t.c. $S - \varepsilon < f(\bar{x}_\varepsilon) \leq S$

Se $x > \bar{x}_\varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}_\varepsilon)$

Quindi concludo che $x > \bar{x} \Rightarrow$

$$S - \varepsilon < f(\bar{x}_\varepsilon) \leq f(x) \leq S < S + \varepsilon$$

Ho dimostrato l'esistenza di K_ε : $K_\varepsilon = \bar{x}_\varepsilon$