Chiusura e frontiera negli spazi metrici

Def. Dato (X, d) spazio metrico, $\forall\, x \in X$ e $\forall\, A, B \subset X$ non vuoti, definiamo la distanza tra x e A

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \mid a \in A\} \geqslant 0$$

e la distanza tra A e B

$$d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A, b \in B\} \geqslant 0.$$

Oss. $x \in A \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d(x, A) = 0.$

$A \cap B \neq \emptyset \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} d(A, B) = 0.$

L'inf non è necessariamente un minimo.

Esempio. In $\mathbf{R}$ con la distanza Euclidea $d(0,]0, 1[) = 0$.

Prop. (X, d) *spazio metrico,* $\emptyset \neq A \subset X \Rightarrow$

$$d_A : X \to \mathbf{R}$$
$$d_A(x) = d(x, A)$$

funzione continua.

Oss. In altre parole la distanza da un sottoinsieme è continua.

Dim. $\forall\, x_0, x \in X$, $\forall\, a \in A$ per la disuguaglianza triangolare e passando all'inf si ha

$$d(x, a) \leqslant d(x, x_0) + d(x_0, a) \;\Rightarrow\; d_A(x) - d_A(x_0) \leqslant d(x, x_0)$$

da cui scambiando x con x_0 si deduce

$$|d_A(x) - d_A(x_0)| \leqslant d(x, x_0).$$

Si ottiene quindi la continuità ponendo $\delta = \varepsilon$. $\square$

Oss. X spazio topologico e $f : X \to \mathbf{R}$ continua $\Rightarrow$ i sottoinsiemi di X definiti da un'equazione continua $f(x) = \alpha$, o da una disequazione $f(x) \geqslant \alpha$ o $f(x) \leqslant \alpha$, con $\alpha \in \mathbf{R}$, sono chiusi in X in quanto preimmagini di chiusi. Analogamente i sottoinsiemi di X definiti da $f(x) > \alpha$ o da $f(x) < \alpha$ o da $f(x) \neq \alpha$ sono aperti in X.

Teor. *Siano* (X, d) *uno spazio metrico e* $\emptyset \neq A \subset X$. *Allora*

$$\mathrm{Cl}_X A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}.$$

Dim. Poniamo $C = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$ e dimostriamo $\mathrm{Cl}_X A = C$.

$\boxed{\subset}$ C chiuso in X perché definito da un'equazione continua. $A \subset C \Rightarrow \mathrm{Cl}_X A \subset C$.

$\boxed{\supset}$ Per assurdo supponiamo che $\exists\, x \in C$ e $x \notin \mathrm{Cl}_X A \Rightarrow \exists\, r > 0$ t.c. $B(x, r) \cap A = \emptyset \Rightarrow d(x, A) \geqslant r > 0$ contraddizione. $\square$

Cor. *$\forall\, x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.*

Cor. *$\forall\, x \in X$ si ha $x \in \mathrm{Fr}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = d(x, X - A) = 0$.*

Cor. *$A \subset X$ chiuso, $x \in X$ e $d(x, A) = 0 \Rightarrow x \in A$.*

N. B. $\emptyset \neq A, B \subset X$ chiusi e $d(A, B) = 0 \not\Rightarrow A \cap B \neq \emptyset$.

Spazi vettoriali normati

Def. Sia V uno spazio vettoriale reale (o complesso). Una funzione

$$\|\cdot\| : V \to \mathbf{R}$$

è detta *norma* su V se valgono le seguenti $\forall\, v, w \in V$, $\forall \alpha \in \mathbf{R}$ ($\forall\, \alpha \in \mathbf{C}$):

(*1*) $\|v\| = 0 \Rightarrow v = 0_V$

(*2*) $\|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

(*3*) $\|v + w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$ (disuguaglianza triangolare per la norma).

Uno *spazio vettoriale normato* $(V, \|\cdot\|)$ è uno spazio vettoriale reale o complesso V munito di una norma.

Oss. $\|0_V\| = \|0\, 0_V\| = 0\|0_V\| = 0$.
$0 = \|0_V\| = \|v - v\| \leqslant \|v\| + \|-v\| = 2\|v\|$, $\forall\, v \in V \Rightarrow \|\cdot\| \geqslant 0$.

Prop. *Sia V uno spazio vettoriale normato. Allora la funzione*

$$d : V \times V \to \mathbf{R}$$
$$d(v, w) = \|v - w\|$$

è una distanza su V. Pertanto V è anche uno spazio metrico e quindi uno spazio topologico.

Dim. Esercizio.

Oss. Si ha: $\big|\|v\| - \|w\|\big| \leqslant \|v - w\| \Rightarrow \|\cdot\| : V \to \mathbf{R}$ continua. Esercizio.

Def. Due distanze d_1 e d_2 su un insieme X sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1(x, y) \leqslant d_2(x, y) \leqslant C_2 d_1(x, y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

Due norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ su uno spazio vettoriale V sono *equivalenti* se $\exists\, C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1\|v\|_1 \leqslant \|v\|_2 \leqslant C_2\|v\|_1, \quad \forall\, v \in V.$$

Oss. Sono due relazioni d'equivalenza.
Norme equivalenti su V inducono distanze equivalenti. Esercizio.

Prop. *Distanze equivalenti su un insieme X inducono la stessa topologia.*

Dim. $d_1, d_2 : X \times X \to \mathbf{R}$ distanze equivalenti $\rightsquigarrow C_1, C_2 > 0$ t.c.

$$C_1 d_1 \leqslant d_2 \leqslant C_2 d_1 \;\Rightarrow\; B_{d_1}(x, C_2^{-1} r) \subset B_{d_2}(x, r) \subset B_{d_1}(x, C_1^{-1} r),$$

$\forall\, x \in X$, $\forall\, r > 0$. □

Esempio. $\forall\, x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ o $\mathbf{C}^n$, definiamo:

$$\|x\|_1 := |x_1| + \cdots + |x_n|;$$
$$\|x\|_\infty := \max(|x_1|, \dots, |x_n|).$$

Sono equivalenti tra loro e alla norma Euclidea $\|\cdot\|$:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_1 \leqslant n\|x\|_\infty, \quad \|x\|_\infty \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\,\|x\|_\infty.$$

Pertanto su $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ potremo usare queste norme, se sarà conveniente, e ottenere comunque la topologia Euclidea.

Esempio. Su $\mathbf{R}^n$ e $\mathbf{C}^n$ si considera anche la *p-norma* (o *norma L^p*), $\forall\, p \geqslant 1$:

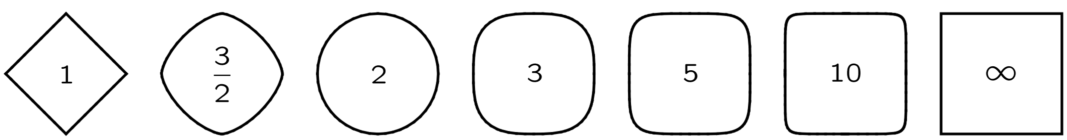
$$\|x\|_p := \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si ha subito la disuguaglianza

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}}\|x\|_\infty$$

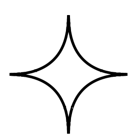
da cui per il Teorema dei due carabinieri

$$\lim_{p \to +\infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty.$$



Sfere unitarie $\|x\|_p = 1$ in $\mathbf{R}^2$ per alcuni valori di $p \geqslant 1$.

Oss. $\|\cdot\|_p$ non soddisfa la disuguaglianza triangolare $\forall\, p \in\,]0, 1[$.



Enunciamo senza dimostrare il teorema seguente.

Teor. $\dim V < \infty \Rightarrow$ *tutte le norme su V sono tra loro equivalenti.*

N. B. $\dim V = \infty \Rightarrow$ esistono norme non equivalenti su V.

Lavoro di gruppo. (*a*) $B^2 \cong [-1, 1]^2 \subset \mathbf{R}^2$. (*b*) $\mathrm{Fr}_{\mathbf{R}^2} B^2 = S^1$.