Lezione 6 ottobre 2023

venerdì 6 ottobre 2023 11:15

Visto: vettori liberi: $\mathcal{V}^2 \ni [\vec{AB}] = \vec{v}$

è possibile def 2 operazioni:

$\vec{v} + \vec{w} := [\vec{AC}]$ è ben definita
$\vec{v} = [\vec{AB}]$ (non dipende dalla
$\vec{w} = [\vec{BC}]$ scelta del rappres.)

Se $c \in \mathbb{R}$, $c\vec{v} := [c \cdot \vec{AB}]$
$\vec{v} = [\vec{AB}]$
è ben definita

Queste operaz. sono definite anche per vettori liberi dello spazio: $\mathcal{V}^3$

Vorremo generalizzare i vettori a dimensioni superiori, ed eventualmente altri contesti.

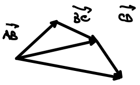
Per ciò, analizziamo le proprietà algebriche di + e · per un numero:

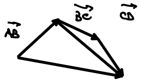
Def. Sia $V \neq \emptyset$ insieme, su cui sia definita un'operazione interna + e la moltiplicazione per numeri reali (ovvero per elementi di K). Se i seguenti assiomi sono soddisfatti:

(V1) + è associativa

(Nel caso di $\mathcal{V}^2$ è vero:

$([\vec{AB}] + [\vec{BC}]) + [\vec{CD}] = [\vec{AD}]$





$[\vec{AB}] + ([\vec{BC}] + [\vec{CD}]) = [\vec{AD}]$)

(V2) $\exists$ elemento neutro per +, chiamato vettore nullo;

(Nel caso di $\mathcal{V}^2$ è vero:

$\vec{0} := [\overrightarrow{BB}]$ con B punto qualsiasi del piano

$\vec{v}+\vec{0} = \vec{0}+\vec{v} = \vec{v}$

($\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$, $[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]$

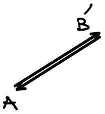
$= [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AB}]$

$[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BB}] = [\overrightarrow{AA}]+[\overrightarrow{AB}] = [\overrightarrow{AB}]$)

(V3) $\exists$ opposto $\forall \vec{v} \in V$

(nel caso di $\mathcal{V}^2$ è vero:

$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$ $\quad -\vec{v} = [\overrightarrow{BA}]$



$[\overrightarrow{AB}]+[\overrightarrow{BA}]$

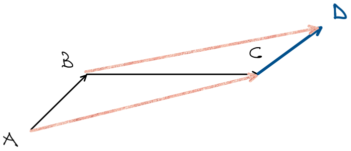
$= [\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}] = [\overrightarrow{AA}]$

$= \vec{0}$)

(V4) + è commutativa

(nel caso di $\mathcal{V}^2$ è vero:

$\vec{v}+\vec{w} = \vec{w}+\vec{v}$



$\vec{v} = [\overrightarrow{AB}]$

$\vec{w} = [\overrightarrow{BC}]$

$\vec{v}+\vec{w} = [\overrightarrow{AC}]$

$\vec{w}+\vec{v} = [\overrightarrow{BD}]$

$\vec{w} = [\overrightarrow{BC}]$

$\vec{v} = [\overrightarrow{CD}]$

usando la geometria euclidea classica non è difficile dimostrare che $\overrightarrow{AC}$ è equipollente a $\overrightarrow{BD}$,

quindi $\vec{v}+\vec{w} = [\overrightarrow{AC}] = [\overrightarrow{BD}] = \vec{w}+\vec{v}$)

cioè $(V,+)$ è un GRUPPO ABELIANO

(V5) Cons. $\cdot$ molt. per numero reale

DISTRIBUTIVA: $c\cdot(v+w) = c\cdot v + c\cdot w$

$\forall c \in \underset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}}, \quad \forall v, w \in V$

V6 DISTRIBUTIVA RISP. ALLA + in $\overset{\mathbb{K}}{\mathbb{R}}$:

$$(c+d)\cdot v = c\cdot v + d\cdot v$$

$\forall c, d \in \mathbb{R}$ $\mathbb{K}$

V7 $(c\cdot d)\cdot v = c\cdot(d\cdot v)$

numero · vettore

prodotto in $\mathbb{R}$ $\mathbb{K}$

numero · vettore

numero · vettore

V8 $\forall v \in V \qquad 1\cdot v = v$

allora V si dice SPAZIO VETTORIALE REALE (SV reale) oppure SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{R}$, ovvero SPAZIO VETTORIALE su $\mathbb{K}$.

Gli elementi di V saranno chiamati VETTORI e indicati $v \in V$

* * *

Esempi di SV reali:

⓪ $\mathcal{V}^2$ & $\mathcal{V}^3$ (e $\mathcal{V}^1$) sono SV reali

① $\mathbb{R}^2 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} : c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$

scrittura in verticale, che useremo quando considereremo $\mathbb{R}^2$ come SV

in $\mathbb{R}$

def: $+$: $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}c_1 \boxed{+} d_1\\c_2 \boxed{+} d_2\end{pmatrix}$ $\hookrightarrow$ in $\mathbb{R}$

$\cdot$: $c\in\mathbb{R}$, $\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$

$c\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}c \boxed{\cdot} d_1\\c\cdot d_2\end{pmatrix}$ $\rightarrow$ in $\mathbb{R}$ $\rightarrow$ in $\mathbb{R}$

Affermo: $\mathbb{R}^2$ con $+$ e $\cdot$ è SV reale

Infatti: (V1), (V2) $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, (V3) $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$, $-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}-c_1\\-c_2\end{pmatrix}$

(V4) sì, (V5), (V6) sì, (V7), (V8) $1\cdot\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot c_1\\1\cdot c_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$

② $\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\left\{\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix} : c_1, c_2, c_3\in\mathbb{R}\right\}$

$+$: $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}c_1+d_1\\c_2+d_2\\c_3+d_3\end{pmatrix}$

$\cdot$: $c\cdot\begin{pmatrix}d_1\\d_2\\d_3\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}c\cdot d_1\\c\cdot d_2\\c\cdot d_3\end{pmatrix}$

(V1), (V2) $\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+1\\c_2+1\\c_3+1\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ NON è il neutro per $+$

$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ è l'elemento neutro
il VETTORE NULLO

(V3) $\forall\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$, il vettore opposto è: $-\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c_1\\-c_2\\-c_3\end{pmatrix}$

(V4), (V5), …, (V8) si verificano facilmente

$\Rightarrow\mathbb{R}^3$ è SV reale

③ $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}}_{n \text{ volte}} = \left\{ \begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix} : c_i \in \mathbb{R} \,,\ \forall i=1\dots n \right\}$

def. $+$: $\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c_1+d_1\\ c_2+d_2\\ \vdots\\ c_n+d_n \end{pmatrix}$

$c\in\mathbb{R}$, $\quad c\cdot\begin{pmatrix} d_1\\ d_2\\ \vdots\\ d_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c\cdot d_1\\ c\cdot d_2\\ \vdots\\ c\cdot d_n \end{pmatrix}$

(V1), (V2) $\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ \vdots\\ 0 \end{pmatrix}$, (V3) $-\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_1\\ -c_2\\ \vdots\\ -c_n \end{pmatrix}$, …, (V8) ✓

④ Sia $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f \mid \underset{\text{funzione}}{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \}$

$+$: $\quad f+g$: è quella funzione $(f+g)(r) := f(r)+g(r)$

$\cdot$: $\quad c\cdot f$: è quella funzione $(c\cdot f)(r) := c\cdot f(r)$

(V1), (V2) $(f+Id_{\mathbb{R}})(r) = f(r)+r \neq f(r) \Rightarrow Id_{\mathbb{R}}$ non è il neutro per $+$

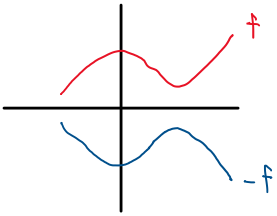
$Id_{\mathbb{R}}(r) = r$

$f+0 = f = 0+f$

dove $0:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è la FUNZIONE COSTANTE UGUALE a ZERO

$0(r) = 0 \in \mathbb{R} \,,\quad \forall r\in\mathbb{R}$

(V3) f, $(-f)(r) = -f(r)$



(V4), …, (V8) sono soddisfatte

$\Rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R})$ è SV reale

VEDREMO: dim $\mathcal{F}$ è INFINITA.

(4bis) $\mathcal{F}((a,b)) = \{f \mid f:\underline{(a,b)} \to \mathbb{R}\}$

= INTERVALLO APERTO

]a,b[

[a,b] INTERVALLO CHIUSO

$\mathcal{F}([a,b])$

$\mathcal{F}([a,b))$ …

sono SV reali

(4ter): $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}) = \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f$ derivabile con derivata continua$\}$

è SV reale

(5) Cons. i polinomi reali in 1 variabile reale:

$$\mathbb{R}[x] := \{\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \mid a_i \in \mathbb{R}\ \forall i = 0,\dots,n \}$$

è definita $p(x)+q(x)$ = è il polinomio il cui coeff. di x^ℓ è $a_\ell + b_\ell$

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, \quad q(x) = \sum_{j=0}^{k} b_j x^j$$

(con la convenzione che $a_\ell = 0$ ovvero $b_\ell = 0$ se $\ell > n$ opp. $\ell > k$)

es. $p(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 8$

$$g(x) = 11x + 13$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x^3 - 2x^2 + 1\cdot x - 8 \\ 0\cdot x^3 + 0\cdot x^2 + 11x + 13 \end{array}\right)+$$

$$= 3x^3 - 2x^2 + 12x + 5 = p(x) + g(x)$$

$$c\cdot p(x) = c\cdot a_0 + c\cdot a_1 x + c\cdot a_2 x^2 + \dots + c\cdot a_n x^n$$

(V1), (V2): neutro è il polinomio nullo 0

$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \dots + (-a_n)x^n$$

.... (V8)

Vedremo: dim $R[x]$ è infinita

ULTIMA generalizzazione:

nella def. di SV posso SOSTITUIRE R con $\mathbb{K}$ campo qualunque: ottengo la definizione di SPAZIO VETTORIALE sul campo $\mathbb{K}$