

Esercizi di Analisi Matematica II

2023/2024

1. SPAZI METRICI

1. Dire se le seguenti funzioni definiscono delle distanze in \mathbb{R} :

$$1. d_1(x, y) = \begin{cases} x^3 - y^3 & \text{se } x \geq y \\ y - x & \text{se } x < y \end{cases}$$

$$2. d_2(x, y) = |x - y| + |x^3 - y^3|$$

$$3. d_3(x, y) = x^2 + y^2 + xy$$

$$4. d_4(x, y) = \frac{|x - y|}{1 + |x - y|}$$

$$5. d_5(x, y) = \min\{|x - y|, 1\}$$

$$6. d_6(x, y) = (1 + |xy|)|x - y|$$

$$7. d_7(x, y) = \sqrt{|x - y|}.$$

2. La funzione $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ definita da $d(x, x') = (x_1 - x'_1)^2 + (x_2 - x'_2)^2$ con $x = (x_1, x_2)$ e $x' = (x'_1, x'_2)$ è una distanza in \mathbb{R}^2 ?

3. Dimostrare che $d(x, y) = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{y} \right|$ è una distanza in $E = (0, 1]$.

2. FUNZIONI I

1. Disegnare nel piano l'insieme di definizione delle seguenti funzioni di due variabili:

$$1. \sqrt{x_1 x_2 - 1}$$

$$2. \ln(x_1^2 - x_2^2)$$

$$3. \arcsin(x_1 + x_2)$$

$$4. \ln \left| \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} \right|.$$

Dimostrare che le funzioni date sono continue nel loro insieme di definizione.