

## Esercizi di Analisi Matematica II

2023/2024

### 1. INSIEMI APERTI, INSIEMI CHIUSI

1. Considerato  $\mathbb{R}^2$  con la distanza euclidea verificare che la chiusura in  $\mathbb{R}^2$  del grafico della funzione  $f(x) = \sin(1/x)$  con  $x \in (0, 1]$  è data dal grafico stesso unito al segmento chiuso che congiunge i punti  $(0, -1)$  e  $(0, 1)$ .

2. Nello spazio metrico  $\mathbb{R}^2$  dotato della distanza euclidea sia

$$A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \in \mathbb{Q}\}.$$

Si determinino l'interno e la chiusura di  $A$ .

3. Si consideri, nello spazio euclideo  $R^2$ , il sottoinsieme

$$A = \{(-2, 4)\} \cup \{(x, y) : y = 2|x|, -1 < x \leq 2\}.$$

Se ne determinino gli eventuali punti interni, punti aderenti e punti di accumulazione.

### 2. LIMITI

1. Si determini, se esiste, il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} xy^4(x+y^4)^{-2}.$$

2. Sia  $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0, 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione così definita: se, per un numero naturale  $n \geq 1$ , si ha che

$$\frac{1}{n+1} \leq x^2 + y^2 < \frac{1}{n}$$

allora

$$f(x, y) = \frac{(-1)^n n}{1+n}.$$

Dimostrare che non esiste il limite di  $f(x, y)$  per  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

3. Dire se esiste il limite seguente:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,-1)} \frac{xy+2}{y+1}.$$

4. Dire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} \frac{|x-2| + |y-1|}{x^2 + y^2 - 5}.$$

5. Dire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} \frac{y^2 - x^2 - 1}{y - 1}.$$

6. Stabilire se esiste il seguente limite

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (\sqrt{3}, 1)} \frac{y-1}{x^2 - 2y^2 - 1}.$$

7. Dire se esiste il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,0)} \frac{x^2 + x - y}{x^2 - y^2 - 1}.$$