GRAVITAZIONE

12 novembre 2022

Legge di gravitazione

Esercizio 1. Trovare la distanza che separa due corpi puntiformi, con masse $5.2\,kg$ e $2.4\,kg$, affinché la loro attrazione gravitazionale sia $2.3\cdot10^{-12}\,N$.

Soluzione. La legge di gravitazione universale newtoniana è basata sul concetto di forza a distanza, dove tale forza dipende dall'inverso del quadrato della distanza

$$F=G\frac{m_1m_2}{d^2}$$

dove G è la costante di gravitazione universale e vale $G=6.67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}$
I due corpi sono ritenuti puntiformi, e quindi la distanza tra i loro due centri coincide con la distanza tra i due punti. Per ricavare la distanza è necessario risolvere rispetto a questa grandezza l'equazione sopra

$$d=\sqrt{\frac{Gm_1m_2}{F}}=\sqrt{\frac{6.67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times5.2\,kg\times2.4\,kg}{2.3\cdot10^{-12}\,N}}=19\,m$$

Esercizio 2. Il Sole e la Terra esercitano ciascuno una forza gravitazionale sulla Luna. Trovare il rapporto F_{sole}/F_{Terra} delle due forze, sapendo che la distanza media della Luna dal Sole è uguale alla distanza dal Sole della Terra.

Soluzione. Se in prima approssimazione consideriamo le distanze Terra-Sole e Luna-Sole uguali, abbiamo

$$\begin{aligned}F_{S-L}&=G\frac{m_Sm_L}{d_{S-L}^2}\\F_{T-L}&=G\frac{m_Tm_L}{d_{T-L}^2}\end{aligned}$$

da cui si ricava

$$R=\frac{F_{S-L}}{F_{T-L}}=G\frac{m_Sm_L}{d_{S-L}^2}\times\frac{d_{T-L}^2}{Gm_Tm_L}=\frac{m_S}{m_T}\frac{d_{T-L}^2}{d_{S-L}^2}$$

Sapendo che $d(T-S)=1.5\cdot10^8\,km$ e $d(T-L)=3.8\cdot10^5\,km$, $m_S=1.99\cdot10^{30}\,kg$ e $m_T=5.98\cdot10^{24}\,kg$, si ha

$$R=\frac{1.99\cdot10^{30}\,kg}{5.98\cdot10^{24}\,kg}\left(\frac{3.8\cdot10^5\,km}{1.5\cdot10^8\,km}\right)^2=2.1$$

Esercizio 3. Un satellite di forma sferico in alluminio gonfiato del diametro di $30\,m$ e di massa $20\,kg$ viene sfiorato da un meteorite con massa $7.0\,kg$ ad una distanza di $3.0\,m$. Trovare la forza esercitata dal satellite sul meteorite quando passa alla minima distanza dalla superficie .

Soluzione. Utilizziamo la relazione che descrive l'interazione gravitazionale tra due corpi e sostituiamo i valori assegnati. In tal caso il satellite non può essere considerato puntiforme e la distanza va calcolata tra i centri dei due corpi.

$$F=G\frac{m_1m_2}{d^2}=\frac{6.67\cdot10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times20\,kg\times7.0\,kg}{18^2\,N}=2.9\cdot10^{-11}\,N$$

Esercizio 4. Una massa M divisa in due parti, di massa rispettivamente m e $M-m$, che sono in seguito allontanate fra di loro ad un certa distanza. Trovare il rapporto m/M che rende massima la forza gravitazionale tra le due parti.

Soluzione. Applicazione la legge di gravitazione supponendo che la distanza sia fissa e valga d

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} = G\frac{m\left(M-m\right)}{d^2} = \frac{G}{d^2}\left(Mm - m^2\right)$$

la quantità G/d^2 è costante, mentre il fattore $\left(Mm-m^2\right)$ ha la forma di una funzione polinomiale di secondo grado in funzione di m. Dovremmo ricordare che tale polinomio ha la forma grafica di una parabola con concavità rivolta verso il basso (coefficiente di m^2 negativo) e quindi il massimo corrisponde al valore dell'ascissa del suo vertice

$$V_m = -\frac{b}{2a} = -\frac{M}{-2} = \frac{M}{2}$$

quindi per $m = \frac{M}{2}$, cioè

$$\frac{m}{M} = \frac{1}{2}$$

Esercizio 5. A che distanza dalla Terra sulla congiungente Terra-Sole deve trovarsi una sonda spaziale affinché l'attrazione gravitazionale del Sole compensi quella terrestre?

Soluzione. Se le due forze devono equilibrarsi, devono essere uguali in intensità, ma di verso opposto. (possiamo pensare ad una bilancia con due masse diverse alle estremità e quindi con due bracci di lunghezza diversa)

$$F_{Ss} = G\frac{m_S m_s}{d_{Ss}^2} = G\frac{m_T m_s}{d_{Ts}^2} = F_{Ts}$$

da cui

$$m_S d_{Ts}^2 = m_T d_{Ss}^2$$

oppure usando i valori in letteratura delle masse

$$\frac{m_{Sole}}{m_{Terra}} = \left(\frac{d_{Ss}}{d_{Ts}}\right)^2 = 332776$$

ma $d_{Ts} + d_{Ss} = d_{TS} = 1.5 \cdot 10^8\,km$, per cui $d_{Ss} = 1.5 \cdot 10^8 - d_{Ts}$.
Sostituendo si ha

$$\left(\frac{1.5 \cdot 10^8 - d_{Ts}}{d_{Ts}}\right)^2 = 332776$$

svolgendo si ottiene l'equazione

$$331775 d_{Ts}^2 + 3.0 \cdot 10^8 d_{Ts} - 2.25 \cdot 10^{16} = 0$$

da cui si ottiene

$$d_{Ts} = 260000\,km$$

Esercizio 6. Un'astronave viaggia su una rotta rettilinea dalla Terra alla Luna. Trovare la distanza dalla Terra alla quale si annulla la risultante delle forze gravitazionali che agiscono sull'astronave.

La distanza media tra la Terra e la Luna è di $3.8 \cdot 10^5\,km$. L'astronave è soggetta alla forza di attrazione gravitazionale della Terra e della Luna che hanno la stessa direzione, ma verso opposto (moto rettilineo).

$$F_{Ta} = G\frac{m_T m_a}{d_{Ta}^2} = G\frac{m_L m_a}{d_{La}^2} = F_{La}$$

la relazione deriva dal fatto che la somma dei due vettori deve essere nulla. Pertanto

$$\frac{m_T}{m_L} = \frac{d_{Ta}^2}{d_{La}^2}$$

il rapporto tra le masse dei due corpi celesti è dato dalla letteratura ed è uguale a 81.25, per cui

$$d_{Ta}^2 = 81.25 \times d_{La}^2$$

ma, $d_{La} = d_{TL} - d_{Ta}$, per cui

$$d_{Ta}^2 = 81.25 \times (d_{TL} - d_{Ta})^2$$

svolgendo si ha

$$80.25 d_{Ta}^2 - 162.5 \times 3.8 \cdot 10^5 d_{Ta} + 81.25 \times \left(3.8 \cdot 10^5\right)^2 = 0$$

si ottiene quindi, scegliendo la soluzione compatibile

$$d_{Ta} = 342000\,km$$

Esercizio 7. Un corpo è sospeso a un dinamometro su una nave che sta navigando lungo la linea dell'equatore con una velocità v. Dimostrare che la lettura sulla scala deve essere modificata, cioè: se P_0 è il valore che si legge quando la nave è ferma, quando essa è in moto il nuovo valore è $P_0\left(1 \pm 2^{\omega v}/g\right)$ dove ω è la velocità angolare della terra.

Soluzione. La forza agisce sulla nave in movimento, oltre al suo peso, è

$$F_n = m\frac{v^2}{r} = m\frac{\omega_n^2 r^2}{r} = mr\omega_n^2$$

dove ω_n è la velocità angolare della nave e ricordando che nei moti circolari $v = \omega r$. Ma poiché la nave si muove rispetto alla Terra con una velocità v, la sua velocità complessiva sarà $\omega_n = \omega_{Terra} \pm \frac{v}{r}$, dove il doppio segno tiene conto del verso di moto della terra rispetto a quello della rotazione della Terra). Pertanto si può riscrivere la forza F_n come

$$F_n = mr\left(\omega_{terra} \pm \frac{v}{r}\right)^2$$

Il dinamometro segnerà una forza P data da $P = mg - F_n$, cioè

$$P = mg - mr\left(\omega_{terra} \pm \frac{v}{r}\right)^2$$

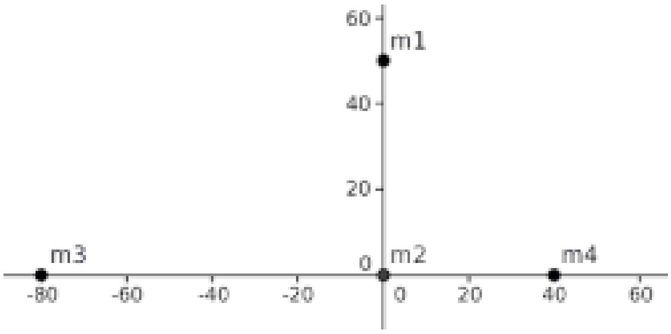
Quando la nave è ferma il dinamometro segna una forza

$$P_0 = m\left(g - r\omega_{terra}^2\right)$$

Allora, sostituendo

$$P = P_0\frac{g - r\left(\omega_{terra} \pm \frac{v}{r}\right)^2}{g - r\omega_{terra}^2} = P_0\left(1 \pm \frac{2\omega_{terra} v}{1 - r\omega_{terra}^2}\right) = P_0\left(1 \pm \frac{2\omega v}{g}\right)$$

Esercizio 8. Quattro sfere, con masse $m_1 = 400\,kg$, $m_2 = 350\,kg$, $m_3 = 2000\,kg$ e $m_4 = 500\,kg$, hanno coordinate $(x;y)$ rispettivamente $(0, 50\,cm)$, $(0,0)$, $(-80\,cm, 0)$, $(40\,cm, 0)$. Trovare la forza gravitazione risultante $\overrightarrow{F}_2$ esercitata su m_2 dalle altre masse.



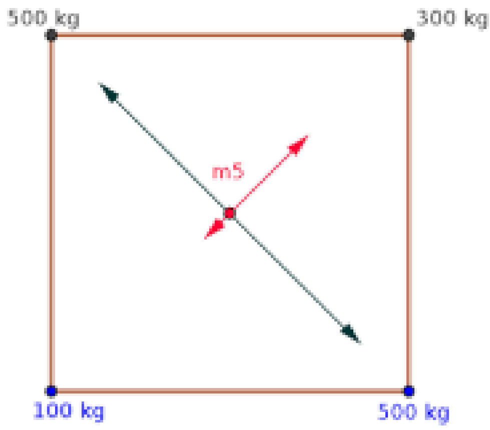
Soluzione. questo esercizio intende applicare il principio di sovrapposizione delle forze gravitazionali, cioè il calcolo della forza totale mediante le regole di somma dei vettori. Le masse sono disposte come nella figura. La somma delle forze deve tenere conto delle direzioni e dei versi dei vettori. Calcoliamo scomponendo le forze lungo le componenti orizzontali e verticali

$$F_x = F_{3x} + F_{4x} + F_{1x} = G\left(\frac{2000 \times 350}{0.8^2} - \frac{500 \times 350}{0.4^2}\right) + 0 = 0\,N$$

$$F_y = F_{1y} + F_{3y} + F_{4y} = G\frac{400 \times 350}{0.5^2} + 0 + 0 = 3.7 \cdot 10^{-5}$$

La forza totale è quindi uguale a F_y.

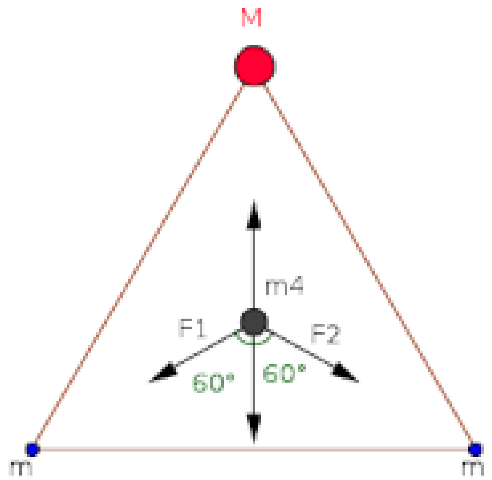
Esercizio. Nella figura sono indicate le masse di quattro sfere poste agli angoli di un quadrato di lato $2.0\,cm$. Trovare l'intensità e la direzione della forza gravitazionale risultante da esse esercitate su una sfera di massa $m_5 = 250\,kg$ posta al centro del quadrato.



Soluzione. le quattro forze hanno direzione e verso indicati in figura. Le due forze, la cui intensità è indicata in verde, si annullano poiché le masse sono uguali e disposte in verso opposto a m_5; se il lato del quadrato è di $2.0\,cm$, allora la sua semi diagonale sarà $\frac{d}{2} = \frac{20\sqrt{2}}{2} = 1.4\,cm$; la risultante sarà data pertanto dalla differenza

$$F_t = G\left(\frac{300 \times 250}{0.014^2} - \frac{100 \times 250}{0.014^2}\right) = 0.017\,N$$

Esercizio 9. Nella disposizione in figura (dove le masse sono poste ai vertici di un triangolo equilatero), trovare il rapporto M/m tale da annullare la risultante delle forze gravitazionali esercitate dalle tre sfere su quella posta nel baricentro.



Soluzione. Il problema è analogo al precedente, cambia solo la geometria della disposizione delle masse. Supposto che il lato del triangolo misuri l, la sua altezza sarà $l\frac{\sqrt{3}}{2}$; basta quindi ricordare che la massa nel baricentro si trova a due terzi dell'altezza, per cui m_4 disterà dalle tre masse

$$l\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{3} = l\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Pertanto la risultante delle due forze prodotte da m è la diagonale del rombo avente come lato F_1; ma

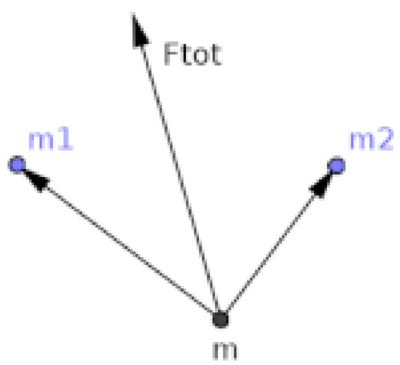
$$F_{1+2} = F_1 = F_2$$

(osserva la geometria, dove il rombo è formato da due triangoli equilateri con un lato in comune); ne deriva che la forza (F_3), dovuta a M, deve avere lo stesso modulo della forza F_{1+2}, da cui

$$F_1 = G\frac{mm_4}{\frac{l^2}{3}} = G\frac{Mm_4}{\frac{l^2}{3}} = F_3$$

pertanto $M/m = 1$, cioè $m = M$.

Esercizio 10. Due sfere, con massa $m_1 = 800\,kg$ e $m_2 = 600\,kg$, sono a distanza di $0.25\,m$. Trovare intensità e direzione della forza gravitazionale risultante esercitata su una sfera di $2.0\,kg$ posta a $0.20\,m$ da m_1 e a $0.15\,m$ da m_2.



Soluzione. Calcoliamo l'intensità della risultante applicando il principio di sovrapposizione alla forza gravitazionale, secondo le regole del calcolo vettoriale

$$\begin{aligned} F_1 &= G\frac{800\,kg \times 2.0\,kg}{0.20^2\,m^2} = 2.7 \cdot 10^{-6}\,N \\ F_2 &= G\frac{600\,kg \times 2.0\,kg}{0.15^2\,m^2} = 3.6 \cdot 10^{-6}\,N \end{aligned}$$

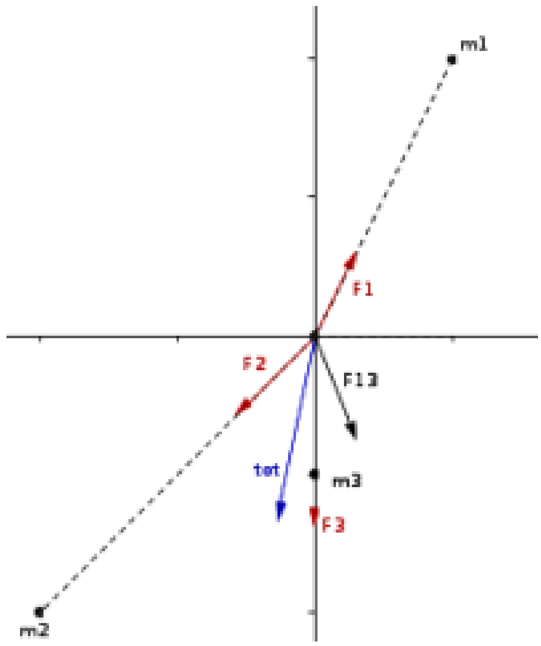
$$F_{tot} = \sqrt{(2.7 \cdot 10^{-6}\,N)^2 + (3.6 \cdot 10^{-6}\,N)} = 4.4 \cdot 10^{-6}\,N$$

Per determinare la direzione facciamo riferimento alla figura. Le tre distanze verificano il th. inverso di Pitagora e il triangolo mm_1m_2 è rettangolo. Il vettore F_{tot} ha una direzione data da

$$\alpha = \arctan\left(\frac{\frac{800\times 2.0}{0.20^2}}{\frac{600\times 2.0}{0.15^2}}\right) = 37°$$

tra la direzione della forza risultante e quella congiungente m_2.

Esercizio 11. Tre sfere hanno le seguenti masse e coordinate: $20\,kg$, $x = 0.50\,m$, $y = 1.0\,m$; $40\,kg$, $x = -1.0\,m$, $y = -1.0\,m$; $60\,kg$, $x = 0$, $y = -0.50\,m$. Trovare l'intensità della forza gravitazionale complessiva da esse esercitate su una sfera di $20\,kg$ posta nell'origine del sistema di riferimento.



Soluzione. calcoliamo, attraverso le coordinate le distanze di ogni singola massa dall'origine.

$$\begin{aligned} d_1 &= \sqrt{(0.5^2 + 1^2)} = 1.11\,m \\ d_2 &= \sqrt{\left((-1)^2 + (-1)^2\right)} = 1.42\,m \\ d_3 &= \sqrt{(0^2 + 0.5^2)} = 0.5\,m \end{aligned}$$

Calcoliamo le rispettive forze

$$\begin{aligned} F_1 &= G\frac{20 \cdot 20}{1.11^2} = 2.2 \cdot 10^{-8} \\ F_2 &= G\frac{40 \cdot 20}{1.42^2} = 2.6 \cdot 10^{-8} \\ F_3 &= G\frac{60 \cdot 20}{0.5^2} = 3.2 \cdot 10^{-7} \end{aligned}$$

Le direzioni lungo le quali le forze agiscono sono quelle della congiungente le masse. Per cui

$$\begin{aligned}
\angle F_1 &= \arctan \frac{1}{0.5} = 63.4° \\
\angle F_2 &= \arctan \frac{1}{1} = 225° \\
\angle F_3 &= 270°
\end{aligned}$$

Possiamo quindi scomporre le forze lungo le loro componenti orizzontali e verticali

$$\begin{array}{rl}
F_{1x} = F_1 \cos 63.4 = 9.9 \cdot 10^{-9} & F_{1y} = F_1 \sin 63.4 = 2.0 \cdot 10^{-8} \\
F_{2x} = F_2 \cos 225 = -1.8 \cdot 10^{-8} & F_{2y} = F_2 \cos 225 = -1.8 \cdot 10^{-8} \\
F_{3x} = 0 & F_{3y} = -3.2 \cdot 10^{-7}
\end{array}$$

La risultante sarà pertanto

$$\begin{aligned}
F_{xtot} &= 9.9 \cdot 10^{-9} - 1.8 \cdot 10^{-8} - 0 = -8.1 \cdot 10^{-9} \\
F_{ytot} &= 2.0 \cdot 10^{-8} - 1.8 \cdot 10^{-8} - 3.2 \cdot 10^{-7} = -3.2 \cdot 10^{-7}
\end{aligned}$$

La forza totale è

$$F_{tot} = \sqrt{(-8.1 \cdot 10^{-9})^2 + (-3.2 \cdot 10^{-7})^2} = 3.2 \cdot 10^{-7}$$

Esercizio 12. Calcolare l'accelerazione di gravità sulla superficie della Luna dai valori della sua massa e del suo raggio.

Soluzione. I valori richiesti sono reperibili nella letteratura. $m_L = 7.36 \cdot 10^{22}\, kg$, $r_L = 1.74 \cdot 10^6\, m$. Supponiamo che un corpo di massa qualunque (per comodità $1\, kg$) cada sulla Luna sotto l'effetto del proprio peso. Allora il peso del corpo può essere confrontato con la legge universale. La forza esercitata dalla Luna è applicata nel suo centro, perché la massa può essere considerata come concentrata in questo punto. In tal caso la distanza tra il centro della Luna e il corpo può essere considerata uguale al raggio della Luna.

$$F = m_{corpo} g_{lunare} = G \frac{m_{corpo} m_L}{r_L^2}$$

sostituendo e semplificando si ha

$$g_{lunare} = G \frac{7.36 \cdot 10^{22}\, kg}{(1.74 \cdot 10^6\, m)^2} = 1.62\, \frac{m}{s^2}$$

Esercizio 13. Trovare a quale altezza sopra la superficie terrestre l'accelerazione di gravità è $4.9\, m/s^2$.

Soluzione. Se confrontiamo la legge di gravitazione con la seconda legge di Newton, vediamo che

$$F = ma = G \frac{m m_T}{r^2}$$

semplificando m si ricava che

$$a = G \frac{m_T}{r^2}$$

per ottenere il valore indicato, si risolve rispetto a r

$$r = \sqrt{\frac{G m_T}{a}} = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11}\, \frac{Nm^2}{kg^2} \times 5.98 \cdot 10^{24}\, kg}{4.9\, \frac{m}{s^2}}} = 9.02 \cdot 10^6\, m$$

che corrisponde a circa $9000\, km$ dal centro della Terra, cioè a circa $2650\, km$ dalla superficie terrestre.

Esercizio 14. Una persona che al piano terreno pesa $54\,kg$, sale in cima a una delle torri di $412\,m$ di New York. Trascurando l'effetto della rotazione terrestre, trovare la diminuzione del suo peso a causa della variazione della sua distanza dal centro della Terra.

Soluzione. Se la distanza tra la superficie e il centro della Terra è pari a $6.37 \cdot 10^6\,m$, lo spostamento sulla torre modifica tale distanza in modo assai limitato, portandola a $\left(6.37 \cdot 10^6 + 412\right) m$. L'accelerazione di gravità subirà quindi una diminuzione piccola. Infatti

$$\begin{aligned} g_1 &= G\frac{m_T}{d_1^2} \\ g &= G\frac{m_T}{d^2} \end{aligned}$$

dove g_1 e d_1 sono l'accelerazione di gravità terrestre alla distanza aumentata d_1. Allora, sapendo che

$$g - g_1 = Gm_T\left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{d_1^2}\right) = Gm_T\left(\frac{d_1^2 - d^2}{d^2 d_1^2}\right)$$

sostituendo i valori numerici e sapendo che $d_1 = d + 432$

$$g - g_1 = Gm_T\left(\frac{(d+432)^2 - d^2}{d^2\,(d+432)^2}\right) = Gm_T\frac{432^2 + 862d}{d^2\,(d+432)^2}$$

sostituendo a d il raggio terrestre, si ha

$$g - g_1 = 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.98 \cdot 10^{24}\left(3.33 \cdot 10^{-10}\right) = 1.33 \cdot 10^{-3}$$

la differenza di peso sarà quindi

$$54\,kg \times 1.33 \cdot 10^{-3} = 0.071\,N$$

Esercizio 15. Una tipica stella di neutroni può avere massa uguale a quella del Sole, ma un raggio di soli $10\,km$. Trovare l'accelerazione di gravità alla superficie di quella stella. Trovare la velocità di arrivo al suolo, con partenza da fermo, di un oggetto che cade da $1.0\,m$ sulla superficie di tale stella. (Si ammetta che la stella non ruoti).

Soluzione. Soluzione Basta applicare la legge di gravitazione. L'accelerazione di gravità è data da

$$a_g = G\frac{m_s}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2} \times 1.99 \cdot 10^{30}\,kg}{\left(1.0 \times 10^4\right)^2 m^2} = 1.3 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}$$

la velocità con cui un corpo, partendo da fermo, raggiunge il suolo è pari a

$$v = \sqrt{2ha_g} = \sqrt{2 \times 1\,m \times 1.3 \cdot 10^{12}\,\frac{m}{s^2}} = 1.6 \cdot 10^6\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 16. Un oggetto posto sull'equatore terrestre è accelerato verso il centro della Terra perché la Terra gira su se stessa, verso il Sole perché la Terra gira intorno al Sole e verso il centro della nostra galassia. Il periodo di rivoluzione del Sole rispetto al centro della galassia è $2.5 \cdot 10^8\,anni$ e la sua distanza dallo stesso centro è $2.2 \cdot 10^{20}\,m$. Calcolare i valori di quelle tre accelerazioni in unità di g.

Soluzione. La Terra ruota attorno al proprio asse e un oggetto posto all'equatore subisce una accelerazione centripeta (sappiamo che nel moto circolare uniforme $v = \frac{2\pi r}{T}$, con T periodo)

$$a = \frac{v^2}{r_T} = \frac{4\pi^2 r_T}{T^2} = \frac{4\pi^2 \times 6.37 \cdot 10^6}{(24 \times 3600)} \frac{m}{s^2} = 0.034 \frac{m}{s^2} = 3.4 \cdot 10^{-3} g$$

La Terra gira attorno al Sole e la forza centripeta è in questo caso la forza gravitazionale, per cui l'accelerazione centripeta è l'accelerazione dovuta all'attrazione del Sole,

$$a = G\frac{m_s}{r^2} = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \frac{Nm^2}{kg^2} \times 1.99 \cdot 10^{30}\, kg}{\left(1.5 \times 10^{11}\right)^2 m^2} = 5.9 \cdot 10^{-3} \frac{m}{s^2} = 6.1 \cdot 10^{-4}\, g$$

Il Sole ruota attorno alla galassia e il fenomeno può essere descritto ancora attraverso l'accelerazione centripeta come espressa per un moto circolare uniforme, per cui

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4\pi \times 2.2 \cdot 10^{20}}{\left(2.5 \cdot 10^8 \times 365.25 \times 24 \times 3600\right)^2} = 1.4 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2} = 1.4 \cdot 10^{-11}\, g$$

Esercizio 17. La massima velocità di rotazione possibile per un pianeta è quella per cui la forza di gravità all'equatore eguaglia a malapena la forza centripeta legata alla rotazione. Dimostrare che il più breve periodo di rotazione corrispondente è dato da

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

dove ρ è la densità del pianeta supposto omogeneo.

Soluzione. Uguagliamo l'accelerazione gravitazionale del pianeta all'equatore (distanza dal centro uguale al raggio) e l'accelerazione centripeta

$$\frac{Gm_P}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

ma $v = \frac{2\pi r}{T}$ (dove $2\pi r$ è la circonferenza del pianeta e T il suo periodo di rotazione) e sostituendo

$$\frac{Gm_P}{r^2} = \frac{4\pi^2 r^2}{rT^2}$$

risolvendo rispetto a T, si ha

$$T^2 = \frac{4\pi^2 r^3}{Gm_P}$$

ma la densità di un corpo materiale omogeneo è espressa da $\rho = \frac{M}{V} = \frac{3m_P}{4\pi r^3}$ (ricordiamo che il volume di una sfera è $V = \frac{4}{3}\pi r^3$) e sostituendo e semplificando

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}$$

Esercizio 18. Due masse identiche sono appese ad una bilancia, sulla superficie della terra, mediante fili di massa trascurabile, e la cui lunghezza differisce di h, considerato molto piccolo rispetto al raggio terrestre. Si suppone che la Terra sia sferica e abbia densità $\rho = 5.5\, g/cm^3$. Dimostrare che la differenza di peso dovuta alla diversa distanza dal centro della Terra è $8\pi G\rho mh/3$. Trovare quale differenza di lunghezza porterebbe a una differenza di peso pari a 1 parte su un milione.

Soluzione. In questo caso, proprio per il fatto che la distanza h è enormemente inferiore al raggio terrestre, si deve applicare una procedura matematica particolare che consente di calcolare le variazioni che riguardano modifiche infinitamente piccole. La variazione della forza gravitazionale è data da

$$\Delta P = Gm_T m\left(\frac{1}{(r+h)^2}-\frac{1}{r^2}\right)$$

mentre la differenza tra le distanze è $\Delta r = h + r - r = h$; se calcoliamo il rapporto tra queste due grandezze, otteniamo il rapporto tra le due variazioni

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{Gm_T m\left(\frac{1}{(r+h)^2}-\frac{1}{r^2}\right)}{h}$$

se svolgiamo qualche calcolo, si ha

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = \frac{Gm_T m\left(\frac{h^2+2hr}{r^2(r+h)^2}\right)}{h}$$

raccogliamo h e semplifichiamo ottenendo

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = Gm_T m\left(\frac{h+2r}{r^2\,(r+h)^2}\right)$$

ora, se come supposto, h può essere considerato trascurabile rispetto al raggio terrestre, si avrà

$$\frac{\Delta P}{\Delta r} = Gm_T m\left(\frac{2r}{r^4}\right)$$

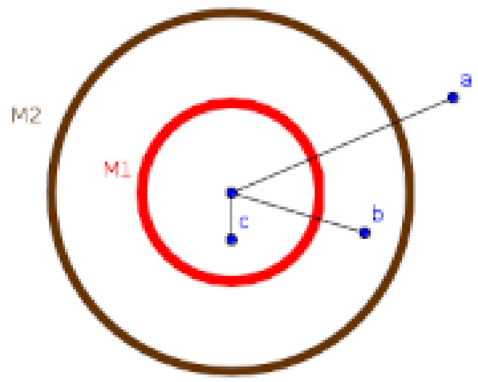
ma $m_P = \rho V = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ e sostituendo, si ottiene quanto richiesto

$$\Delta P = G\frac{4}{3}\pi r^3\rho m\left(\frac{2r}{r^4}\right) = \frac{8}{3}\pi Gmh\rho$$

Se ora $\frac{8}{3}\pi Gmh\rho = 10^{-6}$, risolvendo rispetto ad h, si avrà

$$h = \frac{3\cdot 10^{-6}}{8\pi \times 6.67\cdot 10^{-11}\times 5500} = 3.2\,m$$

Esercizio 19. La figura rappresenta due strati sferici concentrici di densità uniforme, aventi masse M_1, M_2. Trovare la forza da essi esercitata su una particella di massa m, posta alla distanza r dal centro comune nel caso in cui $r = a$, $r = b$, $r = c$. La distanza r è misurata dal centro.



Soluzione. Soluzione Per affrontare questo esercizio ricordiamo che uno strato sferico omogeneo di materia non esercita alcuna forza gravitazionale su una particella localizzata al suo interno. Pertanto per $r = a$, la massa subisce l'attrazione di entrambi gli strati M_1 e M_2 per cui

$$F = G\frac{(M_1 + M_2)\, m}{a^2}$$

per $r = b$, agisce solo lo strato M_2

$$F = G\frac{M_2 m}{b^2}$$

per $r = c$, per quanto detto sopra

$$F = 0$$

Esercizio 20. I diametri di Marte e della Terra sono rispettivamente $6.9 \cdot 10^3\, km$ e $1.3 \cdot 10^4\, km$. La massa di Marte è 0.11 volte la massa della Terra. Trovare il rapporto tra le densità medie dei due pianeti, il valore di g su Marte e la velocità di fuga da Marte.

Soluzione. Soluzione La densità di un corpo è definita come il rapporto tra la sua massa e il suo volume. Se supponiamo che i pianeti abbiano una densità omogenea, avremo

$$\frac{\rho_M}{\rho_T} = \frac{m_M}{m_T}\frac{V_T}{V_M} = 0.11 \times \left(\frac{r_T^3}{r_M^3}\right) = 0.11 \times \left(\frac{6.5 \cdot 10^3}{3.45 \cdot 10^3}\right)^3 = 0.74$$

calcoliamo l'accelerazione mediante il confronto con quella terrestre

$$\frac{g_M}{g_T} = \frac{m_M}{m_T}\left(\frac{r_T}{r_M}\right)^2 = 0.11 \times \left(\frac{6.5 \cdot 10^3}{3.45 \cdot 10^3}\right)^2 = 0.39$$

da cui $g_M = 0.39 \times 9.81 = 3.82\, \frac{m}{s^2}$.
Calcoliamo infine la velocità di fuga da Marte sempre in rapporto con quella dalla Terra:

$$\frac{v_M}{v_T} = \sqrt{\frac{2Gm_M}{r_M}} \times \sqrt{\frac{r_T}{2Gm_T}} = \sqrt{0.11 \times \frac{6.5 \cdot 10^3}{3.45 \cdot 10^3}} = 0.45$$

La velocità di fuga dalla Terra è $v = 11.2\, \frac{km}{s}$, per cui

$$v_M = 5.1\frac{km}{s}$$

Esercizio 21. Un'astronave è in stallo ai confini della nostra galassia, a 80000 anni luce dal centro galattico. Trovare la sua velocità di fuga dalla galassia, la massa della galassia è $1.4 \cdot 10^{11}$ volte quella del Sole. (supponiamo che la massa galattica abbia una distribuzione sferica uniforme).

Soluzione. Soluzione L'anno luce è la distanza percorsa dalla luce in un anno, per cui $1\, al = 3.0 \cdot 10^8\, \frac{m}{s} \times (365.25 \times 24 \times 3600)\, s = 9.47 \cdot 10^{15}\, m$. La velocità di fuga da un centro di attrazione è data da

$$v = \sqrt{\frac{2Gm}{r}} = \sqrt{\frac{2G \times 1.4 \cdot 10^{11} \times 1.99 \cdot 10^{30}\, kg}{8.0 \cdot 10^4 \times 9.47 \cdot 10^{15}}} = 2.2 \cdot 10^2\, \frac{km}{s}$$

Esercizio 22. Dimostrare che la velocità di fuga dal Sole, da un punto a distanza uguale a quella della Terra dal sole, è $\sqrt{2}$ volte la velocità della Terra sulla sua orbita, assimilabile a un cerchio.

Soluzione. La velocità di rivoluzione della Terra è data da

$$v_T = \frac{2\pi R}{T}$$

la velocità di fuga dal Sole è

$$v_F^{sole} = \sqrt{\frac{2Gm_S}{R}}$$

la Terra ruota su di un'orbita circolare e subisce una accelerazione centripeta pari a

$$\frac{v^2}{R} = \frac{Gm_S}{R^2}$$

da cui

$$v_T = \sqrt{\frac{Gm_s}{R}}$$

pertanto confrontando le due relazioni si ha

$$v_F^{sole} = \sqrt{2}v_T$$

Esercizio 23. Una particella di polvere da una cometa, di massa m, si trova a distanza R dal centro della Terra e a distanza r dal centro della Luna. Chiamando M_T la massa della Terra e M_L la massa della Luna, trovare l'energia potenziale della particella.

Soluzione. L'energia potenziale è definita come

$$U(r) = -\frac{GMm}{r}$$

cioè il lavoro per portare un corpo di massa m ad una certa distanza da un corpo di massa M, che riteniamo maggiore. In questo caso la particella di polvere è sottoposta alla forza gravitazione del Sole e della Luna e anche per l'energia potenziale vale il principio di sovrapposizione, per cui

$$U = -Gm\left(\frac{M_T}{R} + \frac{M_L}{r}\right)$$

Esercizio 24. Le tre sfere sono disposte come in figura. Le loro masse sono $m_1 = 800\,g$, $m_2 = 100\,g$, $m_3 = 200\,g$. Le sfere hanno i centri allineati, con $L = 12\,cm$ e $d = 4.0\,cm$. Se muoviamo la sfera di mezzo fino a portarla ad una distanza $m_2 - m_3$ (fra i centri) uguale a d, trovare il lavoro svolto su m_2 da noi, dalla risultante delle forze di attrazione gravitazionale esercitate su m_2 da m_1 e m_3.

Soluzione. Soluzione Il lavoro compiuto da noi (come forza esterna) corrisponde alla variazione dell'energia potenziale gravitazionale, cioè $\Delta U = -W$. Calcoliamo quindi questa variazione (dai dati numerici risulta che $L - d = 2d$)

$$\begin{aligned} \Delta U &= -Gm_2\left(\frac{m_1}{d} + \frac{m_3}{2d}\right) + Gm_2\left(\frac{m_1}{2d} + \frac{m_3}{d}\right) \\ W &= Gm_2\left(\frac{m_1 - m_3}{2d}\right) = 6.67 \cdot 10^{-11} \times 0.1\left(\frac{0.6}{0.08}\right) = 5.0 \cdot 10^{-11} \end{aligned}$$

Il lavoro fatto dalla risultante delle forze gravitazionali sarà l'opposto di questo, cioè $-5.0 \cdot 10^{-11}\,J$

Esercizio 25. a)Trovare la velocità di fuga da un asteroide sferico di raggi $500\,km$ e accelerazione gravitazionale alla superficie di $3.0\,m/s^2$. b) Trovare poi a quale distanza dalla superficie arriverà una particella che si stacca con velocità radiale di $1000\,m/s$ e infine c) la velocità di impatto con l'asteroide di un oggetto lasciato cadere liberamente da fermo a $1000\,km$ dalla superficie.

Soluzione. a) L'asteroide ha un volume pari a

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi \times \left(5.0 \cdot 10^5\right)^3 = 5.2 \cdot 10^{17}\,m^3$$

Poiché l'accelerazione gravitazionale da esso determinata è data da $g_a = \frac{Gm_a}{r^2}$, da cui

$$m_a = \frac{g_a r^2}{G} = \frac{3.0\,\frac{m}{s^2} \times \left(5.0 \cdot 10^5\right)^2}{G} = 1.1 \cdot 10^{22}\,kg$$

possiamo ora calcolare la velocità di fuga dall'asteroide che funge da centro attrattore

$$v_a = \sqrt{\frac{2Gm_a}{R}} = \sqrt{\frac{2G \times 1.1 \cdot 10^{22}}{5.0 \cdot 10^5}} = 1713\,\frac{m}{s}$$

b) calcoliamo attraverso la legge di conservazione dell'energia meccanica. all'istante del distacco dall'asteroide la particella possiede una energia pari a $E_i = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{Gm}{R}$, dove R è il raggio dell'asteroide, mentre nel momento in cui si ferma, avendo una velocità minore di quella di fuga, avrà una energia pari a $E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{Gm}{r} = -\frac{Gm}{r}$, dove r è la distanza dal centro dell'asteroide raggiunta. Uguagliando le due quantità, si ha

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{r}$$

risolvendo rispetto a r, si ha

$$r = \frac{-GM}{\left(\frac{1}{2}v_i^2 - \frac{GM}{R}\right)} = \frac{-2GMR}{v_i^2 R - 2GM} = -\frac{2GM}{v_i^2} + R$$

pertanto la distanza dalla superficie sarà

$$r - R = 250\,km$$

c) nella posizione di partenza la particella possiede una energia totale

$$E_i = K + U = 0 - \frac{GMm}{r}$$

nel momento dell'impatto con l'asteroide essa diviene

$$E_f = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{R}$$

per la conservazione dell'energia, si ha

$$-\frac{GM}{r} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R}$$

da cui, risolvendo rispetto a v, si ha

$$v = \sqrt{2G \times 1.1 \cdot 10^{22} \times \left(\frac{10^6}{1.5 \cdot 10^6 \times 0.5 \cdot 10^6}\right)} = 1400\,\frac{km}{s}$$

Esercizio 26. Un pianeta immaginario ha massa $5.0 \cdot 10^{23}\,kg$, raggio $3.0 \cdot 10^6\,m$, ed è privo di atmosfera. Una sonda di $10\,kg$ deve essere lanciata verticalmente dalla superficie del pianeta. a) Trovare la sua energia cinetica a $4.0 \cdot 10^6\,m$ dal centro se è lanciata con un'energia cinetica di $5.0 \cdot 10^7\,J$; b) trovare l'energia cinetica da fornire se deve raggiungere una distanza massima di $8.0 \cdot 10^6\,m$ dal centro del pianeta.

Soluzione. a) la sonda ha $v_i = 0$; la sua energia iniziale è solo potenziale

$$E_i = K_i + U = \frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R}$$

quella finale

$$E_f = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{r}$$

dove R è il raggio del pianeta e r è la distanza dal centro del pianeta. Eguagliando, si ha

$$\frac{1}{2}mv_i^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{Mm}{r}$$

da cui

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = K_i + GMm\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

sostituendo, si ottiene

$$K_f = 5.0 \cdot 10^7 + 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.0 \cdot 10^{23} \times 10 \times \left(\frac{-1.0 \cdot 10^6}{1.2 \cdot 10^{13}}\right) = 2.2 \cdot 10^7\,J$$

b) supponiamo che alla distanza assegnata, la sonda abbia una componente verticale nulla della velocità; ciò comporta che la sue $K_f = 0$. Pertanto

$$K_i - G\frac{Mm}{R} = -G\frac{Mm}{r}$$

dove K_i è il nostro valore incognito.

$$K_i = G\frac{Mm}{R} - G\frac{Mm}{r} = GMm\left(\frac{r-R}{rR}\right)$$

sostituendo i valori numerici, si ha

$$K_1 = 6.67 \cdot 10^{-11} \times 5.0 \cdot 10^{23} \times 10 \times \left(\frac{5.0 \cdot 10^6}{2.4 \cdot 10^{13}}\right) = 6.9 \cdot 10^7\,J$$

Esercizio 27. In una stella doppia, due stelle di ugual massa di $3.0 \cdot 10^{30}\,kg$ ruotano intorno al centro di massa del sistema su un raggio di $1.0 \cdot 10^{11}\,m$. Trovare la loro comune velocità angolare.

Soluzione. se le due stelle hanno uguale massa, il loro centro di massa sarà nel punto medio della congiungente i loro centri. La forza che ogni stella esercita sull'altra è data da

$$F = G\frac{m^2}{d^2}$$

viste dal centro di massa, le stelle si trovano alla stessa distanza, r, e quindi $d = 2r$, pertanto

$$F = G\frac{m^2}{4r^2}$$

Applicando la seconda legge di Newton, si ha

$$G\frac{m^2}{4r^2} = ma = m\omega r$$

dove ωr è l'accelerazione centripeta per il moto di rotazione supposto circolare. Risolvendo rispetto a ω, si ha

$$\omega = \sqrt{\frac{Gm}{4r^3}} = \sqrt{\frac{G \times 3.0 \cdot 10^{30}}{4 \times (1.1 \cdot 10^{11})^3}} = 2.2 \cdot 10^{-7}\, s^{-1}$$

Esercizio 28. Due stelle di neutroni, separate da una distanza di $10^{10}\, m$, hanno ugual massa di $10^{30}\, kg$ e raggio di $10^5\, m$. Sono inizialmente ferme una rispetto all'altra. Trovare la loro velocità quando la distanza che le separa si riduce a metà del valore iniziale.

Soluzione. Le stelle sono soggette alla reciproca attrazione gravitazionale. L'accelerazione esercitata dalla forza è

$$a = G\frac{m}{d^2} = G\frac{10^{30}}{10^{20}} = 0,67\,\frac{m}{s^2}$$

se partono da ferme è possibile utilizzare la relazione del moto uniformemente accelerato (supponendo che proprio questo sia il tipo di movimento)

$$v_f^2 = v_i^2 + 2as = 2 \times 0.67\,\frac{m}{s^2} \times 0.5 \cdot 10^{10}\, m$$

da cui

$$v_f = \sqrt{2 \times 0.67\,\frac{m}{s^2} \times 0.5 \cdot 10^{10}\, m} = 8.2 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$$

un istante prima dell'impatto i centri delle due stelle si troveranno ad una distanza di $2 \cdot 10^5$, e l'accelerazione da essi subita sarà

$$a = G\frac{m}{d^2} = G\frac{10^{30}}{4 \cdot 10^{10}} = 1,67 \cdot 10^9\,\frac{m}{s^2}$$

e quindi la velocità sarà

$$v_f = \sqrt{2 \times 1.67 \cdot 10^9\,\frac{m}{s^2} \times (10^{10} - 2 \cdot 10^5)\; m} = 8.2 \cdot 10^4\,\frac{m}{s}$$

Esercizio 29. Un proiettile è sparato verticalmente dalla superficie terrestre con velocità iniziale di $10\, km/s$. Trascurando la resistenza dell'aria, trovare la distanza alla quale potrà arrivare.

Soluzione. La velocità iniziale è minore della velocità di fuga dalla Terra, per cui il proiettile salirà verticalmente riducendo gradualmente la propria velocità fino ad arrestarsi. Tutta la sua energia cinetica si trasformerà quindi in energia potenziale gravitazionale.

$$K_i + U_i = K_f + U_f$$

cioè

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = G\frac{M_T m}{d}$$

dividendo per m e risolvendo rispetto a d, si ottiene

$$d = 2G\frac{M}{v^2} = 2G\,\frac{m^3}{kg \cdot s^2} \times \frac{5.98 \cdot 10^{24}\,kg}{10^8\,\frac{m^2}{s^2}} = 8.0 \cdot 10^6\,m$$

Esercizio 30. Una massa di $20\,kg$ è posta nell'origine degli assi, e una di $10\,kg$ sull'asse x a $x = 0.80\,m$. Quest'ultima è lasciata libera mentre la prima è tenuta ferma nella sua posizione. Trovare a) l'energia potenziale gravitazionale del sistema delle due masse immediatamente dopo il rilascio della massa di $10\,kg$ e b) l'energia cinetica della massa di $10\,kg$ dopo che si è spostata di $0.20\,m$ verso l'altra.

Soluzione. a) L'energia potenziale gravitazionale è data da.

$$U = -GMm\left(\frac{1}{r}\right)$$

sostituendo i valori assegnati, si ha

$$U = -6.67 \cdot 10^{-11} \times 20 \times 10\left(\frac{1}{0.8}\right) = 1.67 \cdot 10^{-8}\,J$$

b) se la massa più piccola si è spostata verso sinistra di $0.2\,m$, si ha una variazione di

$$\Delta U = G\frac{Mm}{\Delta r} = 6.67 \cdot 10^{-11} \times 20 \times 10\left(\frac{1}{0.8} - \frac{1}{0.6}\right) = 0.56 \cdot 10^{-8}\,J$$

tale variazione si trasforma in energia cinetica

Esercizio 31. La distanza media di Marte dal Sole è 1.52 volte quella della Terra dal Sole. Dalla legge dei periodi di Keplero calcolare quanti anni impiega Marte a compiere un giro attorno al Sole.

Soluzione. La legge dei periodi è la terza legge di Keplero, la quale stabilisce che il rapporto tra il quadrato del periodo di rivoluzione e il cubo del raggio dell'orbita è una costante che dipende dalla massa del Sole. Avremo quindi, supponendo l'orbita circolare,

$$\frac{T_T^2}{r_T^3} = \frac{T_M^2}{r_M^3}$$

da cui

$$\frac{T_M^2}{T_T^2} = \frac{r_M^3}{r_T^3} = (1.52)^3$$

il periodo di rivoluzione terrestre è pari a un anno terrestre e quindi

$$T_M = \sqrt{(1.52)^3} = 1.87\,a_t$$

Esercizio 32. Il satellite Febo del pianeta Marte viaggia su un'orbita di raggio $9.4 \cdot 10^6\,m$, con un periodo di $7h\,39m$. Calcolare la massa di Marte.

Soluzione. La forza gravitazionale svolge il ruolo di forza centripeta, cioè della forza che tiene su un'orbita chiusa un corpo attorno ad un altro, supposto, nel nostro caso, fermo. Pertanto

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}$$

ma, supponendo il moto circolare, $v = \omega r$, dove ω è la velocità angolare costante. Sostituendo e dividendo per m, si ha

$$G\frac{M}{r^2} = \omega^2 r$$

ma, a sua volta, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, dove T è il periodo di rivoluzione

$$G\frac{M}{r^2} = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

Questa è la terza legge di Keplero, infatti

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

Nel nostro caso, quindi, possiamo calcolare M, dopo aver trasformato il tempo in secondi, $7h\,39m = 7 \times 3600 + 39 \times 60 = 5940\,s$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} = \frac{4\pi^2 \times \left(9.4 \cdot 10^6\,m\right)^3}{G\,(27540\,s)^2} = 6.5 \cdot 10^{23}\,kg$$

Esercizio 33. Determinare la massa della Terra dai valori del periodo T e del raggio r dell'orbita della Luna intorno alla Terra: $T = 27.3\,g$ e $r = 3.82 \cdot 10^5\,km$. Supporre che la Luna giri intorno al centro della Terra invece che attorno al centro di massa del sistema.

Soluzione. La relazione che consente di calcolare la massa del corpo centrale, è

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

ma in questo caso, la distanza r è la distanza tra i due centri dei corpi celesti, cioè $r = 3.82 \cdot 10^8 + 6.37 \cdot 10^6 + 1.74 \cdot 10^6 = 3.90 \cdot 10^8\,m$, pertanto

$$M = \frac{4\pi^2 \left(3.90 \cdot 10^8\,m\right)^3}{G\,\frac{Nm^2}{kg^2}\,(27.3 \times 24 \times 3600\,s)^2} = 5.93 \cdot 10^{24}\,kg$$

Esercizio 34. Il Sole, di massa $2.0 \cdot 10^{30}\,kg$, ruota attorno al centro della Via Lattea, che si trova a $2.2 \cdot 10^{20}\,m$ in un tempo di $2.5 \cdot 10^8\,anni$. Supponendo che ciascuna delle stelle della galassia abbia una massa uguale a quella del Sole, e che siano tutte distribuite uniformemente in un volume sferico intorno al centro della galassia, e che il Sole si trovi all'estrema periferia, fare una stima grossolana del numero di stelle della Via Lattea.

Soluzione. Supponiamo che tutta la massa sia concentrata nel centro della sfera e che attragga il nostro Sole; applicando la terza legge di Keplero si ha

$$\frac{T^2}{r^3}=\frac{4\pi^2}{MG}$$

da cui, sapendo che $1\,a=365.25\times 24\times 3600=3.15\cdot 10^7\,s$,

$$M=\frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}=\frac{4\pi^2\times\left(2.2\cdot 10^{20}\right)^3}{6.67\cdot 10^{-11}\times\left(2.5\cdot 10^8\times 3.15\cdot 10^7\right)^2}=1.01\cdot 10^{41}\,kg$$

il numero delle stelle sarà quindi

$$n=\frac{1.01\cdot 10^{41}}{2.0\cdot 10^{30}}=5.0\cdot 10^{10}$$

Esercizio 35. Un satellite ruota su un'orbita circolare con raggio uguale alla metà del raggio dell'orbita lunare. Trovare il suo periodo di rivoluzione espresso in mesi lunari.

Soluzione. Applicando la terza legge di Keplero, si ha

$$T=\sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{GM}}=\sqrt{\frac{4\pi^2\left(\frac{3.82\cdot 10^8}{2}\,m\right)^3}{6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times 5.98\cdot 10^{24}\,kg}}=8.3\cdot 10^5\,s$$

se un mese lunare viene assunto pari a $27.3\,g=27.3\times 24\times 3600=2.36\cdot 10^6\,s$, si avrà che

$$T=\frac{8.3\cdot 10^5}{2.36\cdot 10^6}=0.35\,mese\,lunare$$

Esercizio 36. Trovare la velocità lineare e il periodo di rivoluzione di un satellite terrestre in grado di stare su un'orbita circolare ad un'altezza di $160\,km$.

Soluzione. Applichiamo sempre la legge di Newton

$$G\frac{M}{r^2}=\omega^2 r$$

che si ottiene eguagliando la forza gravitazionale a quella centripeta (la Terra infatti trattiene il satellite in un'orbita circolare); risolvendo rispetto alla velocità angolare, si ha

$$\omega=\sqrt{\frac{GM}{r^3}}=\sqrt{\frac{6.67\cdot 10^{-11}\,\frac{Nm^2}{kg^2}\times 5.98\cdot 10^{24}\,kg}{\left(6.37\cdot 10^6+1.60\cdot 10^5\,km\right)^3}}=1.2\cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}$$

ma la velocità lineare $v=\omega r$ per cui

$$v=1.2\cdot 10^{-3}\,\frac{rad}{s}\times 6.53\cdot 10^6\,m=7816\,\frac{m}{s}$$

Il periodo di rivoluzione può essere calcolato attraverso anche le relazioni del moto circolare uniforme

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=6236\,s=87.3\,min$$

Esercizio 37. Un satellite terrestre, viaggiando su un'orbita ellittica, si trova alla distanza di 360 km nel punto più lontano dalla superficie terrestre e a 180 km nel punto più vicino. Trovare il semiasse maggiore e l'eccentricità dell'orbita.

Soluzione. La prima legge di Keplero afferma che un pianeta ruota su un'orbita ellittica. L'ellisse ha un centro di simmetria, determinato dall'intersezione tra due assi di simmetria perpendicolari tra loro. L'asse maggiore è la linea più lunga di un ellisse passante per il centro di simmetria e i due fuochi. Uno di tali fuochi è occupato dalla Terra. Pertanto nei due punti di distanza massima e minima il satellite è allineato con la Terra. L'asse maggiore, $2a$, sarà, considerando anche il diametro terrestre,

$$2a = 360 + 180 + 2 \times 6.37 \cdot 10^3 = 13280\,km$$

e quindi

$$a = 6640\,km$$

L'eccentricità dell'orbita è definita come il rapporto tra la differenza tra la distanza massima e la minima con la somma tra le due stesse distanze (ogni distanza è riferita al centro della Terra)

$$e = \frac{d_{max} - d_{min}}{d_{max} + d_{min}} = \frac{180}{6730 + 6550} = 0.0136$$

per tutte le ellissi, infatti, l'eccentricità deve essere compresa tra i valori 0 e 1.

Esercizio 38. Due satelliti terrestri, A e B, ciascuno di massa m, sono lanciati in orbite approssimativamente circolari con centro nel centro della terra. Il satellite A è in orbita ad un'altezza di 6400 km; il satellite B in orbita ad un'altezza di 19200 km; il raggio della terra è di 6400 km.Trovare il rapporto tra l'energia potenziale gravitazionale del satellite B e quella del satellite A; trovare il rapporto tra l'energia cinetica del satellite A e del satellite B e individuare quale satellite ha l'energia totale maggiore, se hanno entrambi una massa di 20 kg.

Soluzione. Nel campo gravitazionale della Terra l'energia potenziale può essere interpretata come il lavoro compiuto dalla forza gravitazionale per portare il satellite nella posizione indicata; essa è data da

$$U = -\frac{GM_T m}{r}$$

pertanto

$$\frac{U_B}{U_A} = \frac{\frac{GM_T m}{r_B}}{\frac{GM_T m}{r_A}} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{6400 + 6400}{19200 + 6400} = \frac{1}{2}$$

l'energia cinetica dei satelliti nel loro moto rotatorio è espressa da $K = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$dove ω è la velocità angolare; ma la forza gravitazionale esercitata dalla Terra è in questo caso la forza centripeta; d ciò discende che

$$\omega^2 r^2 = \frac{GM_T}{r}$$

per cui $K = \frac{1}{2}\frac{GM_T}{r}$ e

$$\frac{K_A}{K_B} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{6400 + 6400}{19200 + 6400} = \frac{1}{2}$$

l'energia totale è data da $E = K + U = -\frac{GM_t m}{2r}$ (il segno meno sta ad indicare che il satellite è legato alla Terra) per cui, se $m = 20\,kg$

$$E_A = -\frac{20 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{2\,(1,28 \cdot 10^4)} = -3,13 \cdot 10^{11}\,J$$

$$E_B = -\frac{20 \times 6,67 \cdot 10^{-11} \times 6,0 \cdot 10^{24}}{2\,(2,56 \cdot 10^4)} = -1,56 \cdot 10^{11}\,J$$

Pertanto l'energia totale di B è doppia dell'energia totale di A.

Esercizio 39. Applicando l'equazione della terza legge di Keplero, esprimere la costante gravitazionale G usando per le lunghezze l'unità astronomica $UA = 1.496 \cdot 10^{11}\, m$, per le masse la massa solare $M_S = 1.99 \cdot 10^{30}\, kg$ e l'anno terrestre $a = 3.156 \cdot 10^7\, s$ come unità di tempo.

Soluzione. La terza legge di Keplero si esprime come

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

per cui, risolvendo rispetto a G

$$G = \frac{4\pi^2 r^3}{MT^2} = \frac{4\pi^2 \times 1UA^3}{1\, m_S \times 1a^2} = 4\pi^2\, \frac{UA^3}{m_S a}$$

Esercizio 40. Dimostrare come Newton, guidato dalla terza legge di Keplero, fu in grado di dedurre che la forza che trattiene la Luna sulla sua orbita, praticamente circolare, dipende dall'inverso del quadrato della sua distanza dal centro della Terra.

Soluzione. La terza legge di Keplero è rappresentata dalla seguente relazione

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$$

La Luna è trattenuta dalla Terra dalla forza gravitazionale che svolge il ruolo di forza centripeta, che vale $F_c = ma = m\frac{v^2}{r}$. Ricordando, inoltre, che, nel moto circolare uniforme, $v = \frac{2\pi r}{T}$, si avrà

$$F_c = m\frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

ma, dalla legge di Keplero,

$$\frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{GM}{r^3}$$

e, sostituendo

$$F_c = mr\frac{GM}{r^3} = G\frac{Mm}{r^2}$$

Esercizio 41. Una certa stella doppia è un sistema formato da due stelle, ciascuna con massa uguale a quella del Sole, che girano intorno al comune centro di massa. La distanza che le separa è uguale alla distanza Terra-Sole. Trovare, in anni terrestri il loro periodo di rivoluzione.

Soluzione. Le due stelle hanno uguale massa e il loro centro di massa è posto nel punto medio della congiungente dei loro centri. La legge di Keplero, diviene

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G\,(M_1 + M_2)}$$

da cui

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G\,(M_1 + M_2)} r^3} = \sqrt{\frac{4\pi^2\,(1.5 \cdot 10^{11})^3}{2 \times 6.67 \cdot 10^{-11} \times 1.99 \cdot 10^{30}}} = 2.24 \cdot 10^7\, s = 0.71\, a_t$$

Esercizio 42. Due stelle di massa uguale a m, ruotano sulla stessa orbita circolare, di raggio r, ma in posizioni diametralmente opposte attorno ad una stella più grande nel centro dell'orbita, di massa M. Ricavare un'espressione del periodo di rivoluzione delle due stelle.

Soluzione. Il sistema è a tre corpi. La stella massiva centrale attrae entrambe con una forza

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

mentre le due stelle si attraggono tra loro con una forza

$$F = G\frac{m^2}{4r^2}$$

(la distanza fra i loro centri è, infatti $2r$). La forza complessiva sarà allora che eguaglia la forza centripeta

$$F = \frac{Gm}{r^2}\left(M + \frac{m}{4}\right) = m\frac{v^2}{r}$$

da cui

$$F = G\left(M + \frac{m}{4}\right) = v^2 r$$

ricordando che, dalle relazione del moto circolare uniforme

$$v^2 = \frac{4\pi r^2}{T^2}$$

si ha

$$G\left(M + \frac{m}{4}\right) = \frac{4\pi^2 r^3}{T^2}$$

risolvendo rispetto a T, si ottiene

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G\left(M + \frac{m}{4}\right)}}$$

Esercizio 43. Tre stelle identiche di massa M sono situate ai vertici di un triangolo equilatero di lato L. Trovare la velocità alla quale devono muoversi, per effetto della reciproca attrazione gravitazionale, per mantenersi nella stessa posizione relativa su un'orbita circolare circoscritta al triangolo.

Soluzione. Il raggio della circonferenza circoscritta ad un triangolo equilatero è uguale a $L/\sqrt{3}$. Ogni stella subisce l'attrazione delle altre due. Le due forze uguali formano un angolo di 60°. La forza complessiva è diretta verso il centro ed ha un'intensità $F\sqrt{3}$ (dalla geometria), cioè

$$F_{tot} = G\frac{M^2\sqrt{3}}{L^2}$$

Pertanto, supponendo che le stelle ruotino attorno al centro della circonferenza, si può scrivere

$$G\frac{M^2\sqrt{3}}{L^2} = M\frac{v^2}{\frac{L}{\sqrt{3}}}$$

semplificando e risolvendo rispetto a v, si ha

$$v = \sqrt{\frac{GM}{L}}$$

Esercizio 44. Due oggetti puntiformi, ciascuno di massa m, collegati con una fune (di massa trascurabile) lunga l, sono appesi verticalmente uno sopra l'altro, vicino alla superficie terrestre. Vengono poi lasciati liberi. Dimostrare che la tensione della fune è $T \approx \frac{GMml}{R^3}$.

Soluzione. Il corpo posizionato più in alto è soggetto al proprio peso P_1 e ad una forza verso il basso dovuta alla tensione della corda, T. L'oggetto posto sotto subisce ancora il proprio peso P_2 e una forza diretta verso l'alto, dovuta alla tensione T della corda. Poiché entrambi i corpi in caduta subiscono la stessa accelerazione, avremo

$$P_1 + T = P_2 - T$$

cioè applicando la relazione della legge di gravitazione

$$\frac{GM_T m}{r_1^2} + T = \frac{GM_T m}{r_2^2} - T$$

allora

$$T = \frac{GM_T m}{2}\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = \frac{GM_T m}{2}\left(\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1^2 r_2^2}\right)$$

Essendo i due corpi vicini alla Terra e ricordando che la massa della Terra, generatrice della forza di gravità, può essere concentrata nel suo centro, le distanze r_1 e r_2 sono trascurabili rispetto al raggio della Terra; pertanto $r_1 \approx r_2 \approx R_T$; ma $r_2 = r_1 + l$, così $r_2^2 - r_1^2 = (r_2 - r_1)(r_2 + r_1) \approx 2Rl$. Sostituendo avremo

$$T \approx \frac{GM_t m}{2}\left(\frac{2R_T l}{R_T^4}\right) = \frac{GM_T ml}{R_T^3}$$

Esercizio 45. Due sfere di massa $2,53\,kg$ e $7,16\,kg$ sono fissate a una distanza di $1,56\,m$ fra i rispettivi centri. Una sferetta di massa $212\,g$ è collocata sulla linea congiungente le due sfere a $42,0\,cm$ di distanza dal centro della sfera più grande. Quanto lavoro deve sviluppare un agente esterno per spostare la sfera di $212\,g$ lungo quella linea fino alla distanza di $42,0\,cm$ dalla sfera più piccola?

Soluzione. La sferetta si trova a $0,42\,m$ dalla sfera più grossa e a $1,14\,m$ da quella più piccola. Il lavoro che deve compiere la forza esterna è pari alla differenza tra i potenziali dovuti alle due sfere, cioè

$$W = \Delta U = Gm\,(M - m)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot (7,16 - 2,53)\left(\frac{1}{0,42} - \frac{1}{1,14}\right) = 9,85 \cdot 10^{-11}\,J$$