10 ottobre

Tutti gli esercizi del capitolo 1 salvo sec. 1.9.

Funzioni

Def Dati due insiemi X e Y una funzione f definita in X ed a valori in Y è una legge che ad ogni $x \in X$ associa esattamente un unico $y \in Y$ e si scrive $y = f(x)$, e si scrive anche $f: X \to Y$

Def Il grafico della funzione $f: X \longrightarrow Y$ è il sottoinsieme

$$\Gamma \subseteq X \times Y \stackrel{\cdot}{=} \{(x,y) : x \in X,\ y \in Y\}$$

definito da

$$\Gamma = \{(x,y) :\ x \in X \ \text{ e } \ y = f(x)\}$$

$$= \{(x, f(x)) :\ x \in X\}$$

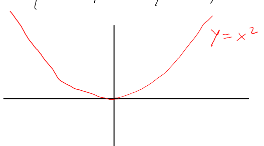
Noi considereremo casi in cui $X \subseteq \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$

$$f : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\Gamma \subseteq X \times \mathbb{R} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \stackrel{\cdot}{=} \mathbb{R}^2$$

$f(x) = x^2$

$$\Gamma = \{(x,y) :\ y = x^2,\ x \in \mathbb{R}\}$$

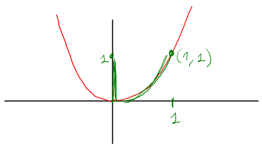


$f : X \to Y$

Per $A \subseteq X$, l'immagine di A è un sottoinsieme $f(A) \subseteq Y$

$$f(A) = \{ y : y = f(x) \text{ per } x \in A \}$$
$$= \{ f(x) : x \in A \}$$

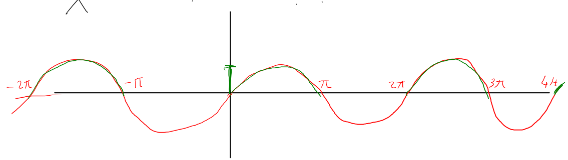
Es $f(x) = x^2$ $\qquad f([0,1]) = [0,1]$



Dato un $B \subseteq Y$ la controimmagine di B è

$$f^{-1}(B) = \{ y : \exists\, x \in X \text{ t.c. } y = f(x) \}$$
$$f^{-1}(B) \subseteq X$$

Es



$\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$

$$\sin^{-1}([0,1]) = \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [2\pi n, 2\pi n + \pi]$$
$$= \bigcup_{n=-\infty}^{+\infty} [2\pi n, \pi(2n+1)]$$

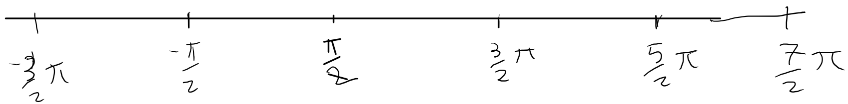
$$\sin^{-1}([3,4]) = \emptyset$$

Def Un sottoinsieme $X \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine

se $\quad x \in X \iff -x \in X$

Es $\quad [-1,1]$ è simmetrico rispetto all'origine

$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi n \ : \ n \in \mathbb{Z} \right\}$



Def Sia $\quad X \subseteq \mathbb{R}$ simmetrico rispetto 0.

Una funzione $f : X \to \mathbb{R}$ è

1) pari se $\quad f(x) = f(-x) \quad \forall\, x \in X$

2) dispari se $\quad f(-x) = -f(x) \quad \forall\, x \in X$

Esempi $\quad x^2$ è pari

x^3 è dispari

Def Siano X e Y due insiemi ed $f: X \to Y$

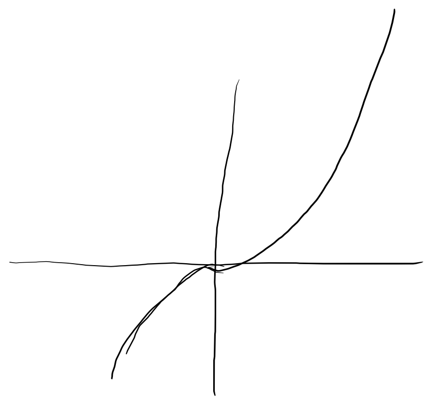
1) f si dice iniettiva se $x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

2) f si dice suriettiva se $\forall y \in Y \ \exists \ x \in X$ t.c.

$y = f(x)$.

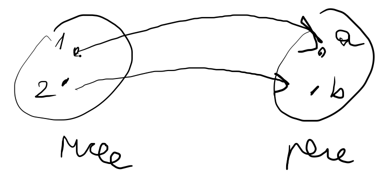
3) f, se è sia ~~sia~~ suriettiva che iniettiva si dice biettiva

$x \longrightarrow f(x) = x^3$



La funzione inversa è $\sqrt[3]{x}$

__Def__ Sia $f: X \longrightarrow Y$ biettiva. Resta definita una nuova funzione $Y \longrightarrow X$ chiamata la funzione inversa di f, denotata $f^{-1}(y)$ dove $\forall \; y \in Y$



$f^{-1}(y)$ è l'unico $x \in X$ t.c. $f(x) = y$.
(spesso uso $g(y)$)

Es. $f(x) = x^3$. Definire l'inversa della f.

Per ogni y devo risolvere
$y = f(x)$

$$y = x^3 \iff \sqrt[3]{y} = x$$

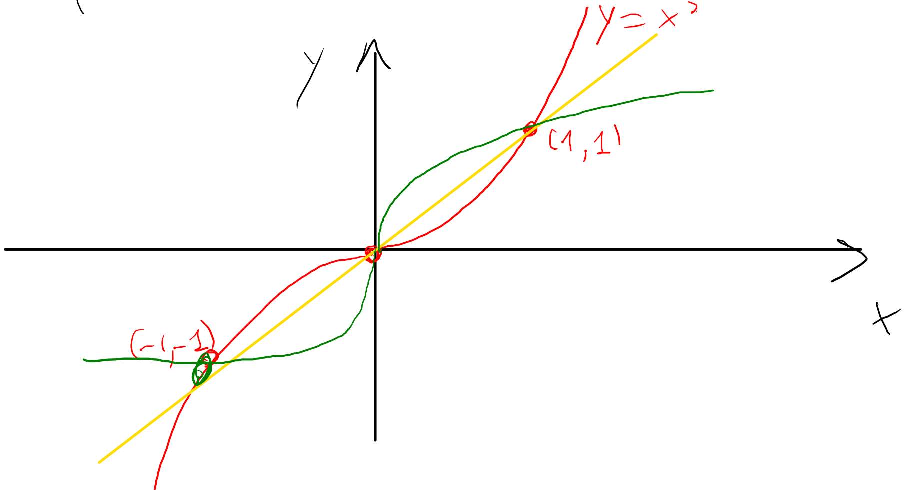
Grafico della funzione inversa

$f(x) = x^3$

$\Gamma_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3 \}$

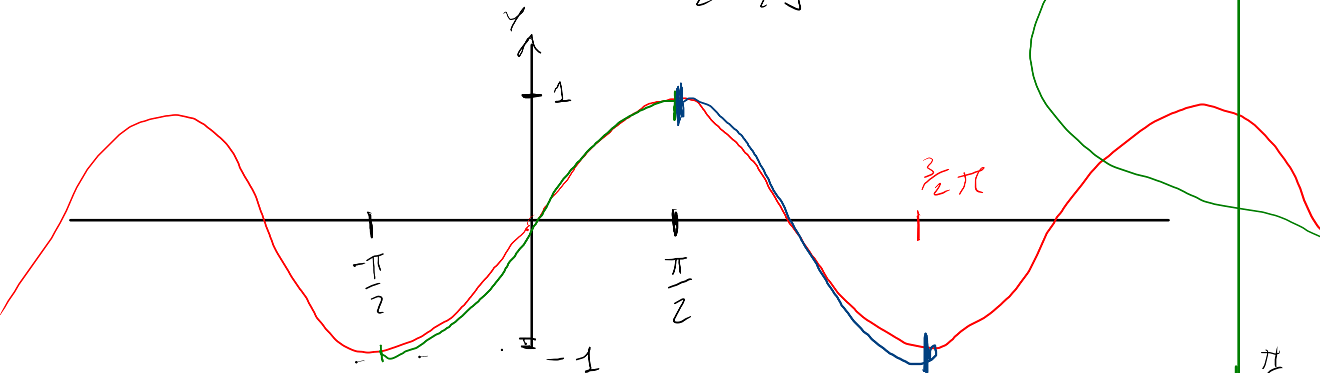
$\Updownarrow$

$\Gamma_{f^{-1}} = \{ (y,x) \in \mathbb{R}^2 : x = \sqrt[3]{y} \}$

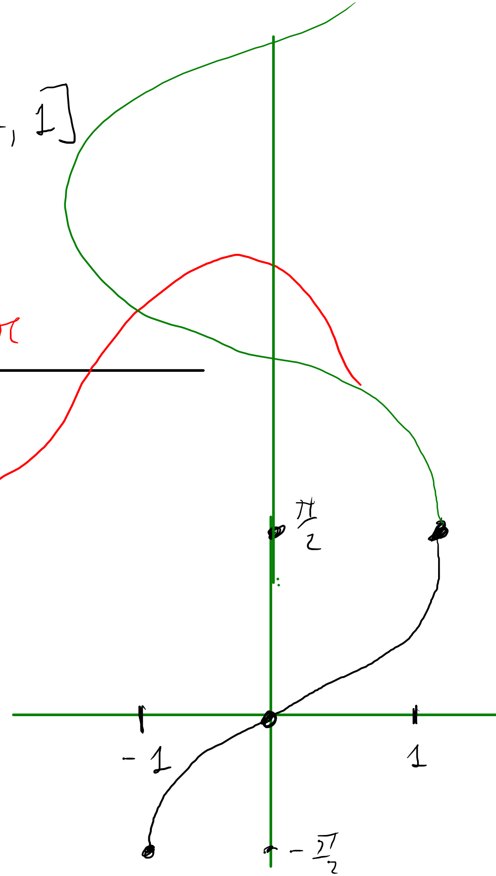


Def (Arcoseno)

$$\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$$



$$\arcsin : [-1, 1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

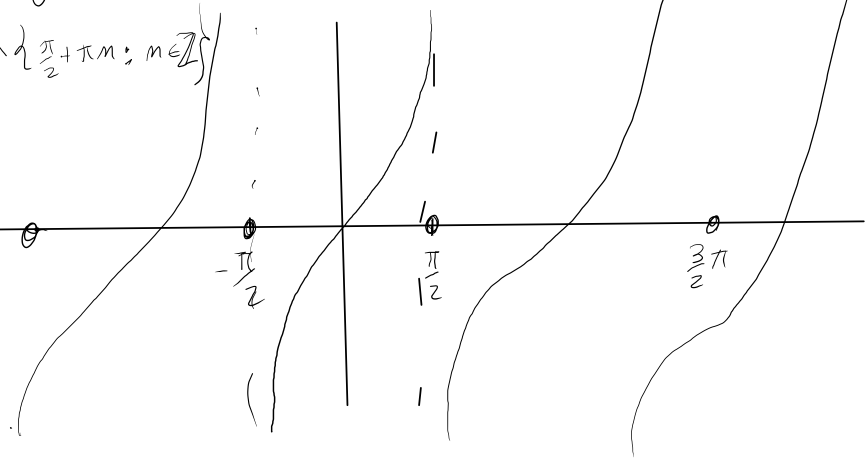


Def (Arcotangente) $\quad \tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}$

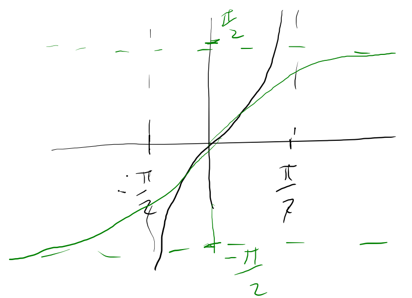
$\mathrm{Dom}(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{\pi}{2} + \pi n : n \in \mathbb{Z} \}$

$\downarrow$

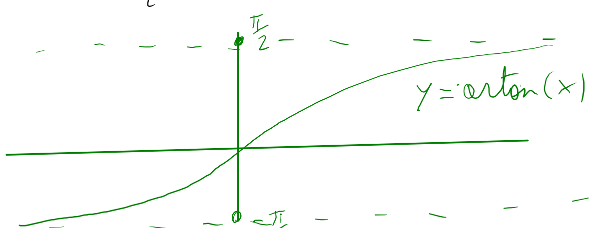
$\mathbb{R}$



$\tan : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R}$



$\arctan(x) : \mathbb{R} \longrightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



Def Sia $T > 0$ e sia $X \subseteq \mathbb{R}$ t.c.

se $x \in X$ allora $x + nT \in X \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

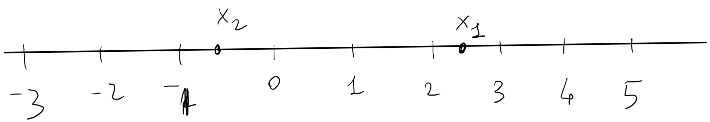
e sia $f : X \to \mathbb{R}$. Diciamo che f e' periodica di periodo T se

$$f(x+nT) = f(x) \quad \forall n \in \mathbb{Z} \text{ e } \forall x \in X.$$

Esempi $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono periodiche di periodo 2π.

$\tan(x)$ e' periodica periodo π.

Def (Parte intera di x) $\quad [x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$

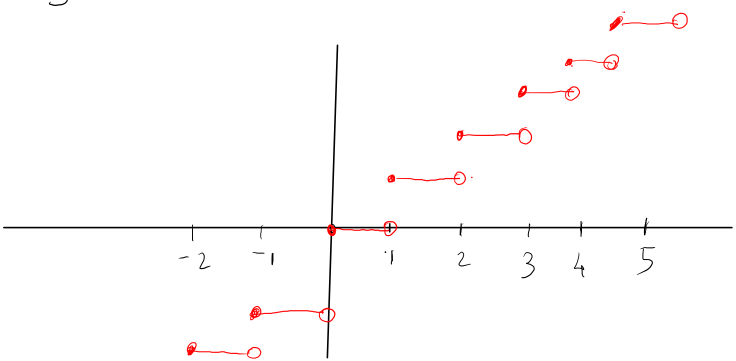


$[x_1] = 2$

$[x_2] = -1$

$[x]$ è definita dalla disuguaglianza $\quad [x] \le x < [x] + 1$

$[n] = n$



È crescente? $\quad$ È dispari? $\quad$ È periodica?

È pari? $\quad$ È iniettiva? $\quad$ È suriettiva $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$