

Teoria della Misura

Teoria della Misura

- Idea: generalizzare il concetto di
 - ▶ lunghezza, area, volume, ...
- Definizione simile a quella di probabilità, tranne la normalizzazione
 - ▶ la misura può prendere anche valore infinito
 - ▶ le proprietà sono simili a quelle delle probabilità, con alcune eccezioni
- Esempio più importante: misura di Lebesgue in \mathbb{R}^n

Teoria della Misura

- (Ω, \mathcal{F}) spazio misurabile; una **misura** è una applicazione

$$m : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$$

tale che

- ▶ $m(\emptyset) = 0$
- ▶ [**σ -additività**] per ogni $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathcal{F}$, a due a due disgiunti,

$$m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = \sum_{n \geq 1} m(A_n)$$

- $m(A) = +\infty$ è possibile!
- (Ω, \mathcal{F}, m) **spazio di misura**

Teoria della Misura

- (Ω, \mathcal{F}, m) spazio di misura; alcuni casi particolari

- ▶ m è una probabilità se

$$m(\Omega) = 1$$

- ▶ m è **finita** se

$$m(\Omega) < +\infty$$

- ▶ m è **σ -finita** se esiste $(A_n)_{n \geq 1}$ tale che per ogni n

$$A_n \in \mathcal{F}, \quad m(A_n) < +\infty$$

e inoltre

$$\Omega = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

- Esempio. Se $\mathcal{F} = \{\emptyset, \Omega\}$, $m(\Omega) = +\infty$, non è σ -finito

Teoria della Misura

- Esempio. **Misura di conteggio**: Ω insieme, $\mathcal{F} = 2^\Omega$, $S \subset \Omega$ fissato

$$\gamma_S(A) = \begin{cases} \text{numero di elementi in } A \cap S & \text{se } A \cap S \text{ è finito} \\ +\infty & \text{altrimenti} \end{cases}$$

γ_S è la misura di conteggio indotta da S

- ▶ $\gamma_S(A) =$ quanti elementi di S sono in A
- ▶ $\Omega = \mathbb{N}$, $S = \{\text{numeri primi}\}$
- ▶ $S = \{\omega\}$ (singleton): γ_S si scrive δ_ω , **misura di Dirac** \rightsquigarrow una **probabilità**

Teoria della Misura

- Proprietà della misura

- ▶ [Finita additività] se A_1, \dots, A_n con $A_i \in \mathcal{F}$ a due a due disgiunti,

$$m(A_1 \cup \dots \cup A_n) = m(A_1) + \dots + m(A_n)$$

- ▶ [Monotonia] se $A, B \in \mathcal{F}$ con $A \subset B$

$$m(A) + m(B - A) = m(B) \quad \text{e} \quad m(A) \leq m(B)$$

- ▶ se $A, B \in \mathcal{F}$

$$m(A \cup B) + m(A \cap B) = m(A) + m(B)$$

Teoria della Misura

- Proprietà della misura

▶ [Subadditività] se $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathcal{F}$,

$$m\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n \geq 1} m(A_n)$$

▶ [Continuità] se $(A_n)_{n \geq 1}$ con $A_n \in \mathcal{F}$ e

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_n \subset \dots, \text{ posto } \lim_n A_n = \bigcup_{n \geq 1} A_n$$

oppure se $m(A_1) < +\infty$ e

$$A_1 \supset A_2 \supset \dots \supset A_n \supset \dots, \text{ posto } \lim_n A_n = \bigcap_{n \geq 1} A_n$$

allora

$$m(\lim_n A_n) = \lim_n m(A_n)$$

Teoria della Misura

- Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n
 - ▶ misura “standard” su \mathbb{R}^n
 - ▶ estende la nozione di lunghezza ($n = 1$), area ($n = 2$), volume ($n = 3$), ...
 - ▶ a quali insiemi si può estendere?
 - ▶ per ogni iper-rettangolo (chiuso, limitato) di \mathbb{R}^n
 $I = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n] \in \mathcal{B}^n$ con $a_i \leq b_i$ per ogni i , si pone

$$\lambda_0(I) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_n - a_n)$$

Teoria della Misura

- **Misura di Lebesgue** su $\Omega = \mathbb{R}^n$; come estendere tale misura?

- ▶ per ogni $A \subset \mathbb{R}^n$ la **misura esterna di Lebesgue** di A è

$$\lambda^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i \geq 1} \lambda_0(I_i) \mid I_i \text{ iper-rettangolo, } A \subset \bigcup_{i \geq 1} I_i \right\}$$

(gli I_i sono iper-rettangoli chiusi, limitati)

- ▶ un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$ è **Lebesgue misurabile** se

$$\lambda^*(E) = \lambda^*(E \cap A) + \lambda^*(E - A) \text{ per ogni } E \subset \mathbb{R}^n$$

↪ la misura di ogni E si ricostruisce additivamente da quella di $E \cap A$ e $E - A$

- ▶ \mathcal{L}^n è la classe di tutti gli insiemi Lebesgue misurabili

Teoria della Misura

- Teorema (Misura di Lebesgue su \mathbb{R}^n)
 - ▶ \mathcal{L}^n è una σ -algebra con $\mathcal{B}^n \subsetneq \mathcal{L}^n \subsetneq 2^{\mathbb{R}^n}$
 - ▶ $\lambda \equiv \lambda^*|_{\mathcal{L}^n}$ è una misura su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$
 - ▶ $\lambda(I) = \lambda_0(I)$ per ogni iper-rettangolo I (chiuso, limitato)
 - ▶ per ogni altra misura m su $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n)$ tale che $m(I) = \lambda_0(I)$ per ogni iper-rettangolo I (chiuso, limitato) $\Rightarrow m = \lambda$
 - ▶ $(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}^n, \lambda)$ è σ -finito
 - ▶ ogni insieme discreto ha misura di Lebesgue nulla
- Una proprietà $\mathcal{P}_x, x \in \mathbb{R}$ è vera quasi ovunque (q.o.) se l'insieme degli x per cui \mathcal{P}_x è falsa ha misura di Lebesgue nulla

Teoria della Misura

- **Misura di Lebesgue** su $D \subset \mathbb{R}^n$, $D \in \mathcal{L}^n$

▶ σ -algebra traccia

$$\mathcal{L}_D^n = \{A \cap D \mid A \in \mathcal{L}^n\}$$

▶ misura di Lebesgue su D , λ_D

$$\lambda_D(A) = \lambda(A \cap D)$$

- Esempio. Se $D = [0, 1]^n$, λ_D è una probabilità