Proposta: martedì 19/12/23 9:00 – 11:00

pausella di ripasso allo scritto.

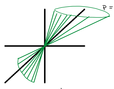
Visto: $\mathcal{C} = (Z(F), F)$, $Z(F) \subseteq \mathbb{P}^2$, F polinomio omog. grado ≥ 1

si cerca anche $Z_p(F) = \{ p = (p_0, p_1, p_2) \mid F(p_0, p_1, p_2) = 0 \} \subseteq Z(F)$

oss. $\boxed{F(p_0, p_1, p_2) = 0 \iff F(\lambda p_0, \lambda p_1, \lambda p_2) = 0 \quad \text{Fomogeneo}}$

$F \in K[x_0, x_1, x_2]$

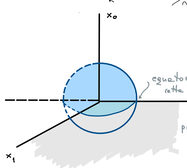
posso anche cons. $Z(F) \subseteq \mathbb{A}^3_K = K^3$

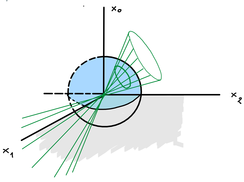


$Z(F)$ è un cono con vertice l'origine O

$Z(F) \subseteq \mathbb{A}^3_K$

Questa osservazione permette di visualizzare le rette di $\mathbb{P}^2_K = \mathbb{A}^3_K \setminus \{0\} / \sim \; = S^2 / \sim_{\text{antip}}$





in $\mathbb{A}^3_K$: (x_0, x_1, x_2)

la retta ∞ in $\mathbb{P}^2_K$: $x_0 = 0$

$x_0 = 0$ in $\mathbb{A}^3_K$ rappresenta un piano, il piano $x_1 x_2$

Vediamo ora che è possibile immergere $\mathbb{A}^2_K$ in $\mathbb{P}^2_K$:

$$j_0 : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$$
$$p = (p_1, p_2) \longrightarrow (1 : p_1 : p_2)$$

j_0 non è suriettiva $j_0(\mathbb{A}^2_K) = \mathbb{P}^2_K \setminus \{x_0 = 0\}$

se $Q = (z_0, z_1, z_2)$

con $z_0 \neq 0$, $Q = (1 : \frac{z_1}{z_0} : \frac{z_2}{z_0}) = j_0(\frac{z_1}{z_0}, \frac{z_2}{z_0})$

FATTO: j_0 è INIETTIVA

Caso $K = \mathbb{R}$; $\underbrace{\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^2}_{\text{top. euclidea}} \xhookrightarrow{j_0} \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} = \underbrace{S^2 / \sim_{\text{antip}}}_{\text{COMPATTO}}$ con la top. spaziale

$S^2 \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}} = \underbrace{\mathbb{R}^3}_{\text{top. euclidea}}$

allora non è difficile verificare che j_0 è immersione topologica

Domanda: se cons. una $\mathcal{C} = (Z(f), f)$ curva algebrica affine, è possibile def. una curva algebrica $\bar{\mathcal{C}} = (Z_p(F), F)$ che abbia stesso grado, stesso # di componenti irriducibili, e tale che

$$Z(f) = j_0^{-1}\left(\underbrace{Z_p(F)}_{\subseteq \mathbb{P}^2_K} \cap j_0(\mathbb{A}^2_K) \right) \subseteq \mathbb{A}^2_K$$

Sì: attraverso la CHIUSURA PROIETTIVA:

Def.: Sia $f \in K[x, y]$ polinomio qualunque

Il polinomio OMOGENEIZZATO di f è

$$(hf)(x_0, x_1, x_2) := x_0^d \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right) \in K[x_0, x_1, x_2]$$

$d = \deg f$

è un polinomio omogeneo di grado d

Def: Se $\mathcal{C} = (Z(f), f)$ è una CURVA AFFINE, la sua CHIUSURA PROIETTIVA è

$$\bar{\mathcal{C}} = (Z_p(hf), hf)$$

Esempio: $f(x, y) = y^2 - x^3$; $d = 3$

$$(hf)(x_0, x_1, x_2) = x_0^3 \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$$
$$= x_0^3 \cdot \left(\left(\frac{x_2}{x_0}\right)^2 - \left(\frac{x_1}{x_0}\right)^3\right)$$
$$= \cancel{x_0^3} \cdot \frac{x_2^2}{\cancel{x_0^2}} - \cancel{x_0^3} \frac{x_1^3}{\cancel{x_0^3}}$$
$$= x_0 x_2^2 - x_1^3$$

Viceversa: se $\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$

$Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_K$, e cons. $Z_p(F) \cap j_0(\mathbb{A}^2_K)$

è immagine tramite j_0 di una curva piana affine?

Sì: Posso considerare il processo di DEOMOGENEIZZAZIONE: sia $F \in K[x, y, z]$ omogeneo;

$$(aF)(x, y) := F(1, x, y)$$

OSS: $a(hf) = f$

$h(aF) \neq F$ in generale

es: $F(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 x_1^2 - x_0^3 x_2 + x_0^4$

$$= x_0^2 \cdot (x_1^2 - x_0 x_2 + x_0^2)$$

$(aF)(x, y) = x^2 - y + 1$, $d = 2$

$$h(aF)(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 \left(\left(\frac{x_1}{x_0}\right)^2 - \frac{x_2}{x_0} + 1\right)$$
$$= x_1^2 - x_0 x_2 + x_0^2$$