# Lezione 9 ottobre 2023

lunedì 9 ottobre 2023 09:09

Visto: $hf$, $f \in K[x,y]$

(simile per $f \in K[y_1, \dots, y_n]$;

$$(hf)(x_0, x_1, \dots, x_n) := x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0}\right))$$

dato $F \in K[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo

$$(aF)(x,y) := F(1, x, y)$$

oss.: posso anche omogeneizzare e deomog. rispetto a una qualunque altra indeterminata

oss: Se $F \in K[x_0, x_1, \dots, x_n]$

$$(aF)(y_1, \dots, y_n) := F(1, y_1, \dots, y_n)$$

UTILITÀ:

Ricordo $j_0 : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$

$$j_0((p_1, p_2)) = (1 : p_1 : p_2)$$

visto che $j_0(\mathbb{A}^2_K) =: U_0 \subseteq \mathbb{P}^2_K$

$$U_0 = \mathbb{P}^2_K \setminus \underbrace{Z_p(x_0)}_{\{x_0 = 0\}}$$

$j_0$ è iniettiva; è suriettiva

$\Rightarrow$ $\exists$ inversa $\varphi_0 : U_0 \to \mathbb{A}^2_K$

$$\varphi_0((q_0 : q_1 : q_2)) = \left(\frac{q_1}{q_0}, \frac{q_2}{q_0}\right) \in \mathbb{A}^2_K$$

$q_0 \neq 0$

Analogamente:

$j_1 : \mathbb{A}^2_K \longrightarrow \mathbb{P}^2_K$

$$j_1((p_1, p_2)) := (p_1 : 1 : p_2)$$

$$j_1(\mathbb{A}^2_K) = U_1 = \mathbb{P}^2_K \setminus Z_p(x_1)$$

iniettiva

$\exists$ $\varphi_1 : U_1 \to \mathbb{A}^2_K$, $\varphi_1((q_0 : q_1 : q_2)) = \left(\frac{q_0}{q_1}, \frac{q_2}{q_1}\right)$

$q_1 \neq 0$

Analogamente: $j_2$, $\varphi_2$

OSS: Se in $\mathbb{A}^3_\mathbb{R}$ cons. la top. euclidea;

$\mathbb{P}^2_\mathbb{R} = S^2/_{\sim_{antip.}}$ , $S^2 \subseteq \mathbb{A}^3_\mathbb{R}$

cons. la top. quoziente

allora $Z_p(x_0)$ è un chiuso in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$

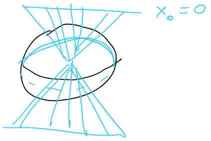
( $C \subseteq S^2/_\sim$ è chiuso $\iff$ $\pi^{-1}(C) \subseteq S^2$ è chiuso,
dove $\pi: S^2 \to S^2/_\sim$

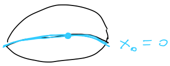
nel caso $Z_p(x_0)$ : $\pi^{-1}(Z_p(x_0)) = Z(x_0) \cap S^2$

$$Z_p(x_0) = \{(p_0:p_1:p_2) \in \mathbb{P}^2_\mathbb{R} : p_0 = 0\}$$

$$\begin{tikzcd}
\pi: S^2 \arrow[d] & v = (p_0, p_1, p_2);\ -v = (-p_0, -p_1, -p_2) \arrow[d] \\
S^2/_\sim & \ni (p_0 : p_1 : p_2) = P = [v]
\end{tikzcd}$$

$x_0 = 0$ in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ $\iff$ $x_0 = 0$ in $S^2$





$\pi^{-1}(Z_p(x_0)) = Z(x_0) \cap S^2$ è chiuso

$\Rightarrow$ $Z_p(x_0)$ è chiuso con top. quoziente

$\Rightarrow$ $U_0$ è aperto in $\mathbb{P}^2_\mathbb{R}$

analog. $U_1$ è aperto, $U_2$ è aperto

OSS: $\underset{x_0 \neq 0}{U_0} \cup \overset{x_1 \neq 0}{U_1} \cup \underset{x_2 \neq 0}{U_2} = \mathbb{P}^2_\mathbb{R}$ è un ricoprimento aperto

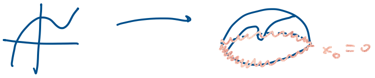
Prop: Cons. $j_0 : \mathbb{A}^2_\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{P}^2_\mathbb{K}$

Sia $C = (Z(f), f)$

$f \in K[x,y]$, $\deg f \geq 1$

cons. $Z_p(hf) \subseteq \mathbb{P}^2_K$ : $\bar{C} = (Z_p(hf), hf)$

Allora: $j_0(Z(f)) = Z_p(hf) \cap U_0$



Dim: $P = (p_0 : p_1 : p_2) \in \underbrace{j_0(Z(f))}$, $p_0 \neq 0$

quindi $P = (1 : p : q) = j_0((p,q))$

$$\overset{!}{=} \left(\frac{p_0}{p_0} : \frac{p_1}{p_0} : \frac{p_2}{p_0}\right)$$

$\iff (p,q) \in Z(f) \iff f((p,q)) = 0$

Cons. $$(hf)(P) = \underbrace{(hf)}_{=F}(1, p, q)$$

$$\overset{!}{=} \underbrace{a(hf)}(p,q)$$

$$= f(p,q) = 0 \implies P \in Z_p(hf)$$

Esercizio: $(hf)(x_0, x_1, x_2) = x_0^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)$

$$a(hf)(x,y) = (hf)(1; x; y)$$

$$= 1^{\deg f} \cdot f\left(\frac{x}{1}, \frac{y}{1}\right)$$

$\implies j_0(Z(f)) \subseteq Z_p(hf) \cap U_0$

Sia $Q = (q_0 : q_1 : q_2) \in Z_p(hf) \cap U_0$

$q_0 \neq 0$ e $Q = (1 : r : s) = j_0((r,s))$

$(hf)(1, r, s) = 0 \iff \underbrace{a(hf)}_{=f}(r,s) = 0$

$\implies Q \in j_0(Z(f))$

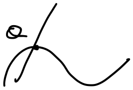
# INTERSEZIONI DI CURVE E RETTE

Lavoriamo ora in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Cons. $\mathcal{C} = (Z_p(F), F)$

e sia $Q \in Z_p(F)$

Cons. una retta $L \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ passante per $Q$



Per $L$ scelgo rapp. parametrica; sia

$B \in L$, $Q \neq B$ ; $Q = (q_0 : q_1 : q_2)$

$B = (b_0 : b_1 : b_2)$

$$L : \begin{cases} x_0 = \lambda q_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda q_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda q_2 + \mu b_2 \end{cases}$$

: $Q$ corrisponde ai valori $(\bar\lambda, \bar\mu) = (1, 0)$

Per studiare $Z_p(F) \cap L$ cons:

$$F(\lambda q_0 + \mu b_0, \lambda q_1 + \mu b_1, \lambda q_2 + \mu b_2) = G(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}[\lambda, \mu]$$

e si può verificare che è omogeneo in $\lambda, \mu$

sappiamo che $F(Q) = 0$

$\to$ $Q \in Z_p(F) \cap L \implies (1, 0)$ annulla il polinomio $G(\lambda, \mu)$

**Def:** Dato un polinomio $G(\lambda, \mu)$ omogeneo, e data $(\bar\lambda, \bar\mu)$ coppia che lo annulla, $(\bar\lambda, \bar\mu) \neq (0,0)$ diamo la seguente def. di MOLTEPLICITÀ di $(\bar\lambda : \bar\mu)$:

se $\bar\lambda \neq 0$ $\quad = (1 : \bar t)$

cons: $g(t) = G(1, t)$; per costruzione $\bar t$ è radice di $g(t)$

La MOLTEPLICITÀ di $(1 : \bar t)$ è la molteplicità di $\bar t$ come radice di $g(t)$.

nelle note

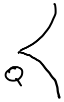
$$m_e(\bar t) =: \underbrace{I_Q(Z_p(F), L)}_{} \quad \left(= \nu_Q(\mathcal{C}, L)\right)$$

MOLTEPLICITÀ DI INTERSEZIONE in $Q$ tra $Z_p(F)$ e $L$

**Def.:** Sia $Q \in Z_p(F)$; $Q$ si dice SINGOLARE

se $\forall L$ retta $\ni Q$, si ha

$$I_Q(Z_p(F), L) \geq 2$$



**Def:** Sia $Q \in Z(f) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$; $Q$ SINGOLARE

se $j_0(Q)$ è singolare per $Z_p(hf)$.

**Def.:** $Q \in Z_p(F)$ è un punto NONSINGOLARE o LISCIO se non è singolare.

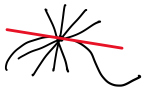
Vedremo: $Q$ è liscio $\Longrightarrow \exists!$ retta $L \ni Q$

t.c.

$I_Q(Z_p(F), L) \geq 2$

e tutte le altre rette

hanno $I_Q = 1$.



queste rette si dirà

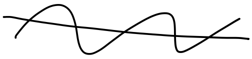
Retta tg proiettiva a $Z_p(F)$

(a $\mathcal{C}$) in $Q$:

$L = T_Q \mathcal{C}$

∴

Teorema: $Z_p(F) \subseteq \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, e sia $L \subseteq \mathbb{P}^2$ retta, tale che $L \not\subseteq Z_p(F)$.



Allora: $\sum_{Q \in Z_p(F) \cap L} I_Q(Z_p(F), L) = d = \deg F$

In particolare $Z_p(F) \cap L \neq \emptyset$ e $Z_p(F) \cap L$ è finito, di $\# \leq d$

**Dim.**: Sia $L = \overline{AB}$, e supp. $B \in Z_p(F)$

$A = (a_0 : a_1 : a_2)$

$B = (b_0 : b_1 : b_2)$

$$L: \begin{cases} x_0 = \lambda a_0 + \mu b_0 \\ x_1 = \lambda a_1 + \mu b_1 \\ x_2 = \lambda a_2 + \mu b_2 \end{cases}$$

$$F(\lambda a_0 + \mu b_0, \lambda a_1 + \mu b_1, \lambda a_2 + \mu b_2) = 0$$

$$G(\lambda, \mu) = 0$$

$B \notin Z_p(F) \Rightarrow (0:1)$ non annulla di $G(\lambda, \mu)$

Cons. $G(1, t) = g(t) = a_d + a_{d-1} t + \dots + a_1 t^{d-1} + a_0 t^d$

$G(\lambda, \mu) = a_d \lambda^d + a_{d-1} \lambda^{d-1} \mu + \dots + a_1 \lambda \mu^{d-1} + a_0 \mu^d$

$(0:1)$ non è radice $\Rightarrow a_0 \neq 0$

$g(t)$ ha grado $d$ $\Rightarrow$ ha esattamente $d$ radici contate con le loro molteplicità

ogni radice $\bar{t}$ di $g(t)$ corrisponde a una coppia $(1 : \bar{t})$ che annulla $G(\lambda, \mu)$.