Lezione 10 ottobre 2023

martedì 10 ottobre 2023 09:08

AVVISO: giovedì 12/10 e 19/10 no lezione

no lezione 23/10, 24/10, 26/10

Proprietà di polinomi:

Prop.: Se $K = \overline{K}$ e $G(\lambda, \mu) \in K[\lambda, \mu]$, $\underset{=d}{\deg} G \geq 1$ omogeneo $\Rightarrow$ $G(\lambda, \mu)$ si fattorizza nel prodotto di polinomi lineari omogenei (non nec. tutti distinti).

Dim.: $G(\lambda, \mu) = a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} \mu + \dots + a_{d-1} \lambda \mu^{d-1} + a_d \mu^d$

Supp. $a_d \neq 0$

cons. $g(t) = G(1, t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_d t^d$

$K = \overline{K} \Rightarrow g(t) = a_d \cdot \left(\prod_{i=1}^{d} (t - b_i) \right)$ ($*$)

Oss.: $(h_g)(\lambda, \mu) = \lambda^{\deg g} \cdot g\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) \overset{!}{=} \lambda^d \cdot G\left(1, \frac{\mu}{\lambda}\right) \overset{!}{=} G(\lambda, \mu)$

$\Rightarrow$ ($*$) $G(\lambda, \mu) = \lambda^d \cdot a_d \cdot \left(\prod_{i=1}^{d} \left(\frac{\mu}{\lambda} - b_i\right) \right) \overset{!}{=} a_d \cdot \left(\prod_{i=1}^{d} (\mu - b_i \lambda) \right)$

Vediamo il caso $a_d = 0$

Sia $k = \max\{ i : a_i \neq 0 \}$

$$G(\lambda, \mu) = a_0 \lambda^d + a_1 \lambda^{d-1} \mu + \dots + a_k \lambda^{d-k} \mu^k$$

$$\overset{!}{=} \lambda^{d-k} \cdot \underbrace{(a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} \mu + \dots + a_k \mu^k)}_{= a_k \cdot \prod_{i=1}^{k} (\mu - b_i \lambda)}$$

usando argomento di prima

$$= a_k \cdot \underbrace{\lambda^{d-k}}_{d-k \text{ fattori lineari}} \cdot \underbrace{\prod_{i=1}^{k} (\mu - b_i \lambda)}_{k \text{ fattori lineari}}$$

DERIVATE & DER. PARZ. DI POLINOMI

Def.: K campo qualunque, $f(t) \in K[t]$

$$f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d$$

$$f'(t) := a_1 + 2 a_2 t + \dots + \underbrace{d\, a_d}_{= \underbrace{a_d + a_d + \dots + a_d}_{d\text{-volte}}} \cdot t^{d-1}$$

Ovvero: possiamo def $(t^k)' := k \cdot t^{k-1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$

e poi estendo in modo lineare a tutti i polinomi

OSS.: Possiamo def. le derivate di un polinomio a coeff. in un DOMINIO DI INTEGRITÀ: D

$f(t) \in D[t]$

Def.: FORMULA DI TAYLOR

Cons. $\mathbb{K}$ campo (opp. D dom. integrità t.c. $D \supseteq \mathbb{Q}$)

Oss.: $\mathbb{K}[t]_{\le d}$ è sp. vettoriale, di dimensione $d+1$; base standard è $\{1, t, t^2, \dots, t^d\}$

sia $b \in \mathbb{K}$; osservo che anche

$\{1, (t-b), (t-b)^2, \dots, (t-b)^d\}$ è una

base di $\mathbb{K}[t]_{\le d}$; infatti sono LIN. INDIP.:

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot (t-b) + c_2 (t-b)^2 + \dots + c_d \cdot (t-b)^d \equiv 0$$

polinomio nullo

osservo che il coeff. di t^d in è c_d

per essere il polinomio nullo, deve essere $c_d = 0$

$$c_0 \cdot 1 + c_1 \cdot (t-b) + c_2 (t-b)^2 + \dots + c_{d-1} (t-b)^{d-1} \equiv 0$$

il coeff. di t^{d-1} è c_{d-1}; per essere il pol. nullo, si deve avere $c_{d-1} = 0$. Continuo così.

Dopo un # finito di passi, trovo che anche $c_0 = 0$.

⇒ sono LIN. INDIP., sono $d+1$ polinomi ⇒ sono generatori.

⇒ ogni polinomio $f(t) \in \mathbb{K}[t]$ può essere espresso in modo unico, come combinaz. lineare di $1, (t-b), \dots, (t-b)^d$

$$\underline{f(t) = b_0 + b_1 \cdot (t-b) + b_2 \cdot (t-b)^2 + \dots + b_{d-1} \cdot (t-b)^{d-1} + b_d \cdot (t-b)^d}$$

$$\underline{f(b) = b_0}$$

$$f'(t) = b_1 + 2 \cdot b_2 (t-b) + 3 \cdot b_3 (t-b)^2 + \dots + (d-1) b_{d-1} (t-b)^{d-2} + d\, b_d \cdot (t-b)^{d-1}$$

$$\underline{f'(b) = b_1}$$

$$f''(t) = 2b_2 + 3!\,b_3(t-b) + \dots + (d-1)(d-2)b_{d-1}(t-b)^{d-3} + d\cdot\overset{b_d}{(d-1)}(t-b)^{d-2}$$

$$\underline{f''(b) = 2b_2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(d)}(t) = d\cdot(d-1)(d-2)\cdots 2\cdot b_d = \underline{d!\,b_d = f^{(d)}(b)}$$

$$\Rightarrow \quad b_0 = f(b), \quad b_1 = f'(b), \quad b_2 = \frac{f''(b)}{2}, \quad b_3 = \frac{f'''(b)}{3!}, \quad \dots \quad b_d = \frac{f^{(d)}(b)}{d!}$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \sum_{i=0}^{d} \frac{f^{(i)}(b)}{i!}(t-b)^i}$$

FORMULA DI TAYLOR

~ . ~ . ~

DERIVATE PARZIALI :

$f \in K[x,y]$ $\quad (f \in K[x_1,\dots,x_n])$

Def. : $\frac{\partial f}{\partial x} = \partial_x f$ è la derivata di f pensato come $f \in K[y][x]$

$$f(x,y) = \overbrace{a_0(y)}^{\in K[y]} + \overbrace{a_1(y)}^{\in K[y]}\cdot x + \dots + a_d(y)\cdot x^d$$

$$\partial_x f = a_1(y) + 2a_2(y)x + \dots + d\,a_d(y)\cdot x^{d-1}$$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \partial_y f$ def. è analoga

si generalizza a $\frac{\partial f(x_1,\dots,x_n)}{\partial x_i}$

Def: le DERIVATE PARZIALI SUPERIORI sono derivate parziali di derivate parziali

NOTAZIONE : invece di $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ scriveremo $\partial_{xx}f$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \rightsquigarrow \partial_{xy}f$, ecc.

$$\boxed{\text{TEOREMA DI SCHWARZ: } \partial_{xy}f = \partial_{yx}f}$$

FORMULA DI TAYLOR:

$\mathbb{K}[x,y]_{\leq d}$, $\dim \mathbb{K}[x,y]_{\leq d}$

$$\{1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots, x^d, x^{d-1}y, \dots, xy^{d-1}, y^d\}$$

$$1+2+3+4+\dots+(d+1) = \underline{(d+1)(d+2)}$$

se $(b_1,b_2)\in\mathbb{K}^2$, un'altra base di $\mathbb{K}[x,y]_{\leq d}$ è data da

$$\{1, (x-b_1), (y-b_2), (x-b_1)^2, (x-b_1)(y-b_2), (y-b_2)^2, \dots\}$$

Allora vale:

$$\boxed{\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(b_1,b_2) + \partial_x f(b_1,b_2)(x-b_1) + \partial_y f(b_1,b_2)\cdot(y-b_2) + \\ & + \frac{1}{2}\left[\partial_{xx} f(b_1,b_2)(x-b_1)^2 + 2\partial_{xy} f(b_1,b_2)(x-b_1)(y-b_2) + \partial_{yy} f(b_1,b_2)(y-b_2)^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\Big[\partial_{xxx} f(b_1,b_2)\cdot(x-b_1)^3 + 3\,\partial_{xxy} f(b_1,b_2)(x-b_1)^2(y-b_2) + \\ & \qquad + 3\cdot\partial_{xyy} f(b_1,b_2)(x-b_1)(y-b_2)^2 + \partial_{yyy} f(b_1,b_2)(y-b_2)^3\Big] \\ & + \dots \text{ (fino al grado } d\text{)} \end{aligned}}$$

Nel caso $(b_1,b_2)=(0,0)$, si ha:

$$\begin{aligned} f(x,y) = {} & f(0,0) + \partial_x f(0,0)\cdot x + \partial_y f(0,0)\cdot y + \\ & + \frac{1}{2}\left[\partial_{xx} f(0,0)\cdot x^2 + 2\cdot\partial_{xy} f(0,0)\cdot xy + \partial_{yy} f(0,0)\cdot y^2\right] \\ & + \frac{1}{3!}\Big[\partial_{xxx} f(0,0)\cdot x^3 + 3\cdot\partial_{xxy} f(0,0)\,x^2y + \\ & \qquad + 3\cdot\partial_{xyy} f(0,0)\,x\cdot y^2 + \partial_{yyy} f(0,0)\cdot y^3\Big] \\ & + \dots \text{ (fino al grado } d\text{)} \end{aligned}$$

Scrittura più compatta: se poniamo $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_x f\\ \partial_y f\end{pmatrix} \in \mathbb{K}[x,y]\times\mathbb{K}[x,y]$

e $H_f := \begin{pmatrix}\partial_{xx} f & \partial_{xy} f\\ \partial_{xy} f & \partial_{yy} f\end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{K}[x,y])$, possiamo riscrivere la formula di Taylor:

$$\boxed{f(x,y) = f(0,0) + {}^t(\nabla f(0,0)) \underbrace{\cdot}_{\text{prodotto di matrici}} \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}x & y\end{pmatrix}\cdot H_f(0,0)\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \dots}$$

FORMULA PER DERIV. DI FUNZ. COMPOSTE:

Se $f \in K[x,y]$, ovvero $F \in K[x_0, x_1, x_2]$

siano $x_1(t), x_2(t) \in K[t]$, ovvero $x_0(t), x_1(t), x_2(t) \in K[t]$

cons. $f(x_1(t), x_2(t)) \in K[t]$

allora

$$(f(x_1(t), x_2(t)))' = (\partial_x f)(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_1'(t) + (\partial_y f)(x_1(t), x_2(t)) \cdot x_2'(t)$$

$$= {}^t\nabla f(x_1(t), x_2(t)) \cdot \begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix}$$

Analogamente, si ha

$$F(x_0(t), x_1(t), x_2(t))' = (\partial_{x_0} F)(x_0(t), x_1(t), x_2(t)) \cdot x_0'(t) +$$

$$+ (\partial_{x_1} F)(x_0(t), \dots) \cdot x_1'(t) +$$

$$+ (\partial_{x_2} F)(x_0(t), \dots) \cdot x_2'(t)$$

Prop.: Se $F(x_0, x_1, x_2)$ è omogeneo, allora ogni derivata parziale di F è un polinomio omogeneo.

INFINE: ci servirà le seguente formula:

TEOREMA DI EULERO:

$F \in K[x_0, x_1, x_2]$ omogeneo:

$$\Longrightarrow \quad x_0 \cdot \partial_{x_0} F + x_1 \cdot \partial_{x_1} F + x_2 \cdot \partial_{x_2} F = (\deg F) \cdot F$$

Esempio: $F = x_0 x_2^2 - x_1^3$

$\partial_{x_0} F = x_2^2$, $\partial_{x_1} F = -3x_1^2$, $\partial_{x_2} F = 2x_0 x_2$

$$x_0 \partial_{x_0} F + x_1 \partial_{x_1} F + x_2 \partial_{x_2} F = x_0 \cdot x_2^2 + x_1(-3x_1^2) + x_2(2x_0 x_2)$$

$$\overset{!}{=} 3x_0 x_2^2 - 3x_1^3 = 3 \cdot (x_0 x_2^2 - x_1^3)$$