MATRICI

Siano $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Una "matrice $n \times m$" è una tabella di numeri reali con n righe e m colonne.

Es.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

è una matrice 2×3

Una generica matrice $n \times m$ è un oggetto del tipo

$$\begin{array}{c} \\ \\ \text{i-esima riga} \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij}^{*} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ j-esima colonna

* posizione ij

$\begin{cases} i \text{ indica la riga} \\ j \text{ indica la colonna} \end{cases}$

In una matrice $n \times m$ ci sono $n \cdot m$ numeri intabellati, detti "entrate".

In breve si scrive $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

Se $n=m$ la matrice si dice quadrata.

Dati n, m, l'insieme di tutte le matrici $n \times m$ si indica con $\mathcal{M}^{n \times m}$.

Ora introdurremo in $\mathcal{M}^{n \times m}$ una struttura di spazio vettoriale.

Se $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$ $\quad B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$

definiamo

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

$$\lambda A = (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \quad \text{per } \lambda \in \mathbb{R}.$$

E facile verificare che:

$A+B = B+A$

$A+(B+C) = (A+B)+C$

$A+0 = A$ (dove $0 = (c_{ij})_{ij}$ con $c_{ij}=0 \ \forall i,j$)

$A+(-A) = 0$

$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$

$(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$

$\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$

$1 \cdot A = A$

attenzione: così come non posso sommare $u \in \mathbb{R}^n$ e $v \in \mathbb{R}^m$ se $n \neq m$, non posso nemmeno sommare $A \in \mathcal{M}^{n \times m}$ e $B \in \mathcal{M}^{p \times q}$ se $(n, m) \neq (p, q)$.

Prodotto di matrici

Siano $A \in \mathcal{M}^{n \times \boxed{m}}$ $B \in \mathcal{M}^{\boxed{m} \times p}$
(in quest'ordine!)

allora le righe di A hanno $\boxed{m}$ elementi, e le colonne di B hanno $\boxed{m}$ elementi

Posso quindi fare il prodotto scalare tra una qualsiasi riga di A e una qualsiasi colonna di B

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \quad \cdots \quad a_{i,m}} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1}, & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mj} & \cdots & b_{m,p} \end{pmatrix}$$

definisco $\displaystyle c_{ij} := \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$

$$= a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{im} b_{mj}$$

e infine definisco

$$AB := (c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,p}} \in \mathcal{M}^{n\times p}$$

In questo modo ad $A \in \mathcal{M}^{n\times m}$, $B \in \mathcal{M}^{m\times p}$ associo $AB \in \mathcal{M}^{n\times p}$.

Esempio

$$\underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}} = \underset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 7 & 3 & 3 \\ 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}}$$

<u>Attenzione</u>

Sono definite sia AB che BA solo se A e B sono quadrate.

Anche in tale caso il prodotto non è commutativo in generale.

Es.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Valgono però le seguenti proprietà:

$A(BC) = (AB)C$ associativa

$A(B+C) = AB + AC$ distributiva

$(A+B)C = AC + BC$ distributiva.

La matrice quadrata $n \times n$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} = (\delta_{ij})_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

si dice matrice identità.

se $A \in M^{n \times m}$, $I_n A = A$

se $A \in M^{n \times m}$, $A I_m = A$

In particolare, se $A \in M^{n \times n}$ (quadrata)

$I_n A = A I_n = A$.

Se $A \in M^{n \times n}$ si dice che A è invertibile se e solo se $\exists\ A^{-1} \in M^{n \times n}$ t.c.

$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

N.B. esistono matrici non invertibili, benché $\neq 0$

Ad esempio $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ non è invertibile.

Infatti se $\exists\ (a_{ij})_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = B$

t.c. $AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

allora avremmo $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

assurdo!

Vedremo poi le condizioni per l'invertibilità e il calcolo dell'inversa.

OSSERVAZIONE

Il sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n = b_n \end{cases}$$

Si può scrivere in forma matriciale

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$