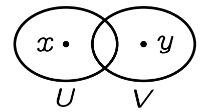
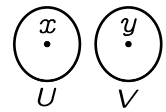
Assiomi di separazione T_1 e T_2

Def. Uno spazio topologico X è:

T_1 se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U$.



T_2 o *di Hausdorff* se $\forall\, x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset$.



Oss. $T_2 \Rightarrow T_1$.
$\not\Leftarrow$

Esempio. $\#\, X \geqslant 2 \Rightarrow X_{\text{ban}}$ non T_1.
$\#\, X = \infty \Rightarrow X_{\text{cof}}$ T_1 non T_2.

T_1: $\forall\, x \neq y \in X_{\text{cof}} \rightsquigarrow U = X - \{y\}$, $V = X - \{x\}$.

Non T_2: $\forall\, U, V \subset X_{\text{cof}}$ aperti non vuoti $\Rightarrow \exists\, A, B \subset X$ finiti t.c. $U = X - A$, $V = X - B \Rightarrow U \cap V = X - (A \cup B) \neq \emptyset$.

X_{dis} T_2 $\forall\, X$.

Oss. Metrizzabile $\Rightarrow T_2$: $\forall\, x \neq y \in (X, d) \rightsquigarrow r = \dfrac{d(x,y)}{2} > 0 \rightsquigarrow$ $x \in U := B_d(x, r)$, $y \in V := B_d(y, r) \Rightarrow U \cap V = \emptyset$.

Oss. $\mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^n$ e i loro sottospazi sono T_2 in quanto metrizzabili. In particolare B^n e S^n sono T_2.

Oss. T_2 è precisamente la proprietà che serve per dimostrare l'unicità del limite per funzioni e successioni.

Teor. *X è $T_1 \Leftrightarrow \forall\, x \in X$ si ha $\{x\}$ chiuso in X.*

In altre parole uno spazio è $T_1 \Leftrightarrow$ i punti sono chiusi.

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ $\forall\, x \in X$, $\forall\, y \in X - \{x\}$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U - V$ e $y \in V - U \Rightarrow y \in V \subset X - \{x\} \Rightarrow X - \{x\}$ aperto.

$\boxed{\Leftarrow}$ $\forall\, x \neq y \in X \rightsquigarrow U := X - \{y\}$, $V := X - \{x\}$ aperti $\Rightarrow$ $x \in U - V$ e $y \in V - U$. $\square$

Prop. *$f, g : X \to Y$ continue e Y $T_2 \Rightarrow$*

$$A = \{x \in X \mid f(x) = g(x)\} \subset X$$

chiuso.

Dim. $\forall\, x \in X - A \Rightarrow f(x) \neq g(x) \Rightarrow \exists\, U, V \subset Y$ aperti t.c. $f(x) \in U$, $g(x) \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset X$ aperto t.c. $x \in W \subset X - A \Rightarrow X - A$ aperto. $\square$

Proprietà topologiche ereditarie

Def. Una proprietà topologica $\mathcal{P}$ è *ereditaria* se valendo per uno spazio X vale anche per tutti i sottospazi topologici di X.

Oss. La metrizzabilità è una proprietà topologica ereditaria.

Prop. *T_1 e T_2 sono proprietà topologiche ereditarie.*

Dim. Dimostriamolo per T_2. T_1 è lasciata per Esercizio.
$\boxed{T_2 \text{ proprietà topologica}}$ X T_2 e $X \cong Y \Rightarrow \exists\, f : X \to Y$ omeo.
$\forall\, y_1 \neq y_2 \in Y\ \exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $f^{-1}(y_1) \in U$, $f^{-1}(y_2) \in V$, $U \cap V = \emptyset$
$\Rightarrow f(U), f(V) \subset Y$ aperti, $y_1 \in f(U)$, $y_2 \in f(V)$, $f(U) \cap f(V) = \emptyset$.

$\boxed{T_2 \text{ ereditaria}}$ X T_2 e $Y \subset X$ sottospazio. $\forall\, x, y \in Y$, $\exists\, U, V \subset X$ aperti t.c. $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap Y$ e $V \cap Y$ aperti disgiunti in Y. $\square$

Immersioni, immersioni locali e omeo locali

Def. Un'applicazione tra spazi topologici $f : X \to Y$ è detta

(1) *immersione* se $f_{|f(X)} : X \to f(X)$ omeo, dove $f(X) \subset Y$ ha la topologia di sottospazio. In simboli $f : X \hookrightarrow Y$ e diciamo che X *si immerge* in Y.

(2) *immersione locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f_{|U} : U \to Y$ è un'immersione. Diciamo che X si *immerge loc.* in Y.

(3) *omeomorfismo locale* se $\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f(U) \subset Y$ intorno di $f(x)$ e $f_{|U} : U \to f(U)$ omeo.

N. B. In inglese: immersione = *embedding*; immersione loc. = *immersion*.

Oss. $X \subset Y$ sottospazio topologico $\Leftrightarrow i_X : X \hookrightarrow Y$ immersione.

Oss. $f : X \hookrightarrow Y$ immersione $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f continua e iniettiva.

$X \hookrightarrow Y \Leftrightarrow X$ omeomorfo ad un sottospazio di Y e a meno di immersione possiamo considerare $X \subset Y$.
$f : X \to Y$ immersione loc. $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ f continua e loc. iniettiva ($\forall\, x \in X$, $\exists\, U \subset X$ intorno di x t.c. $f_{|U} : U \to Y$ iniettiva).
Immersione $\underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}$ immersione loc.

$f : X \to Y$ omeo locale $\Leftrightarrow f : X \to Y$ immersione locale aperta.

Esempio. $\forall\, k < n$ consideriamo le *immersioni canoniche*

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^k &\hookrightarrow \mathbf{R}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbf{R}^{n-k}}) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \mathbf{C}^k &\hookrightarrow \mathbf{C}^n \\ x &\mapsto (x, 0_{\mathbf{C}^{n-k}}). \end{aligned}$$

Abbiamo anche: $B^k \hookrightarrow B^n$, $S^k \hookrightarrow S^n$.
Possiamo considerare $\mathbf{R}^k \subset \mathbf{R}^n$, $\mathbf{C}^k \subset \mathbf{C}^n$, $S^k \subset S^n$, $B^k \subset B^n$, $\forall\, k < n$.
Queste immersioni sono chiuse.

Oss. Se X ha una proprietà topologica ereditaria $\mathcal{P}$ e $Y \hookrightarrow X \Rightarrow Y$ ha $\mathcal{P}$.
In particolare vale per T_1, T_2, metrizzabilità.

Lavoro di gruppo. $f : [0, 2\pi[\to S^1$, $f(t) = (\cos t, \sin t)$, è omeo?