Matrici

Abbiamo introdotto le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Gli elementi della matrice A si denotano con a_{ij} e scriviamo

$$A = (a_{ij})_{\substack{i \in \{1,\dots,m\} \\ j \in \{1,\dots,n\}}}$$

i è l'indice di riga

j è l'indice di colonna

Diciamo che a_{ij} è l'elemento di posto i,j.

Def: una matrice si dice quadrata se il numero delle sue righe coincide con il numero delle sue colonne.

Esempio: la seguente è una matrice quadrata 2×2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} \qquad A_{(1)} = (1 \ \ 3)$$

$$A_{(2)} = (-2 \ \ 5)$$

$$A^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$A^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Def: dati $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $n > 0$, l'insieme delle matrici $m \times n$ è denotato con $M_{m,n}(\mathbb{R})$; l'insieme delle matrici quadrate $n \times n$ è denotato $M_n(\mathbb{R})$

Def: la matrice $m \times n$ nulla è la matrice $m \times n$ le cui entrate sono tutte zero:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Introduciamo delle operazioni tra matrici al fine di rendere $M_{m,n}(\mathbb{R})$ un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Def: siano $m, n \in \mathbb{N}$, $m > 0$, $n > 0$ e siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la somma di A e B, che denotiamo $A + B$, è la matrice definita nel modo seguente: l'entrata di posto i,j di $A+B$ è data da:

$$\underbrace{(A+B)_{ij}}_{\in \mathbb{R}} := \underbrace{A_{ij}}_{\in \mathbb{R}} + \underbrace{B_{ij}}_{\in B} \qquad \begin{matrix} \forall i \in \{1,\dots,m\} \\ \forall j \in \{1,\dots,n\} \end{matrix}$$

(qui utilizziamo il fatto che per descrivere una matrice è sufficiente determinare come ottenere ciascuna delle sue entrate).

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 2+0 & 5+1 \\ -1+0 & 3+(-1) & -2+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 6 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Oss: la matrice nulla è un (in effetti, il) elemento neutro della somma tra matrici

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$; definiamo la moltiplicazione per uno scalare di λ per A, che denotiamo $\lambda \cdot A$, come la matrice

$$(\lambda \cdot A)_{ij} := \lambda \cdot A_{ij} \qquad \begin{matrix} \forall i \in \{1,\dots,m\} \\ \forall j \in \{1,\dots,n\} \end{matrix}$$

moltiplicazione per uno scalare

moltiplicazione tra numeri reali

Prop: l'insieme $M_{m,n}(\mathbb{R})$ con le operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare definite qui sopra è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale.

Dim: per esercizio. (l'elemento neutro è la matrice nulla)

Esempio: sia $\lambda = 3$, e sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot A = 3 \cdot A = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot (-3) & 3 \cdot (-2) & 3 \cdot (-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -9 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

Consideriamo una matrice 2×2:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

Ora consideriamo quattro matrici 2×2 "particolari":

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Consideriamo ora la seguente combinazione lineare di queste quattro matrici:

$$3E + F - 2G + 4H =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} = A$$

Questa costruzione si può ripetere qualsiasi sia la matrice A: se

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{con } a_{ij} \in \mathbb{R} \ \begin{matrix} \forall i \in \{1,2\} \\ \forall j \in \{1,2\} \end{matrix}$$

allora $A = a_{11} \cdot E + a_{12} F + a_{21} G + a_{22} \cdot H$

Questo ci mostra che le quattro matrici E, F, G, H sono tali che ogni altra matrice 2×2 si può scrivere come combinazione lineare di queste quattro matrici con opportuni coefficienti. In questo caso diciamo che E, F, G e H sono un sistema di generatori di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Notiamo che questo ragionamento può essere formulato allo stesso modo per qualsiasi insieme di matrici $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Abbiamo quindi "dimostrato" che

Prop: consideriamo in $M_{m,n}(\mathbb{R})$ l'insieme delle $m \cdot n$ matrici costruite nel seguente modo: esse hanno tutte le entrate nulle fuorché una, la quale è uguale a 1; allora tale insieme è un sistema di generatori per $M_{m,n}(\mathbb{R})$

Ritorniamo alla situazione delle matrici 2×2. La matrice nulla si può scrivere come combinazione lineare delle quattro matrici E, F, G, H:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot E + 0 \cdot F + 0 \cdot G + 0 \cdot H$$

Mi chiedo: esiste un'altra combinazione lineare di E, F, G, H che restituisca la matrice nulla? Ovvero, esistono coefficienti $e, f, g, h \in \mathbb{R}$ tali che non tutti gli e, f, g, h sono nulli e vale

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H \quad ?$$

Riusciamo a capire quali condizioni dobbiamo imporre a e, f, g, h affinché la precedente uguaglianza sia vera?

$$e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H = \begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & f \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ g & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & h \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

Quindi, affinché valga $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = e \cdot E + f \cdot F + g \cdot G + h \cdot H$ deve valere

$$\begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{matrix} e = 0 & f = 0 \\ g = 0 & h = 0 \end{matrix}$$

Pertanto l'unico modo di ottenere la matrice nulla come combinazione lineare delle matrici E, F, G, H è prendere tutti e quattro i coefficienti nulli. In questo caso, diciamo che le quattro matrici E, F, G, H sono linearmente indipendenti.

Notiamo che tutti questi ragionamenti possono essere formulati anche per matrici $m \times n$.

Oss: se prendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

allora $1 \cdot A + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

abbiamo quindi ottenuto la matrice nulla come combinazione lineare delle matrici A e B i cui coefficienti non sono tutti nulli; pertanto, le matrici A e B non sono linearmente indipendenti.

Ritorniamo alla situazione delle matrici 2×2 e consideriamo il seguente insieme

$$T_{2,2}(\mathbb{R}) := \{ A \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a_{21} = 0 \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \in M_{2,2}(\mathbb{R}) : a_{11}, a_{12}, a_{22} \in \mathbb{R} \right\}$$

Dunque $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, ma $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \notin T_{2,2}(\mathbb{R})$.

L'insieme $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è l'insieme delle matrici 2×2 a coefficienti in $\mathbb{R}$ triangolari superiori. Notiamo che $T_{2,2}(\mathbb{R}) \subseteq M_{2,2}(\mathbb{R})$

Vale che:

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in T_{2,2}(\mathbb{R})$
2. se $A, B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$, allora $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{pmatrix}$

   quindi $A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$, pertanto $A + B \in T_{2,2}(\mathbb{R})$
3. se $A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, allora $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$, quindi

   $\lambda \cdot A = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_{11} & \lambda \cdot a_{12} \\ 0 & \lambda \cdot a_{22} \end{pmatrix}$, pertanto $\lambda \cdot A \in T_{2,2}(\mathbb{R})$

Abbiamo verificato quindi che $T_{2,2}(\mathbb{R})$ è un sottospazio vettoriale di $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

Notiamo che l'analogo di $T_{2,2}(\mathbb{R})$ per matrici 3×3 è

$$T_{3,3}(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} : a_{ij} \in \mathbb{R} \ \forall i, \forall j \right\}$$

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ovvero A è una matrice quadrata con n righe e n colonne); la diagonale principale di A è la parte di A data dalle entrate di posto i,i per $i \in \{1,\dots,n\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

diagonale principale