Matrici

Def: sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$; definiamo la <u>trasposta</u> di A come quella matrice, che indichiamo con ${}^tA$, che è un elemento di $M_{n,m}(\mathbb{R})$ determinata dalla seguente proprietà: l'entrata di posto i,j di ${}^tA$ è uguale all'entrata di posto j,i di A, ovvero

$$({}^tA)_{ij} := A_{ji} \qquad \begin{matrix}\forall i \in \{1,\dots,n\}\\ \forall j \in \{1,\dots,m\}\end{matrix}$$

Esempio: se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Prop: siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, allora

1. ${}^t(A+B) = {}^tA + {}^tB$
2. ${}^t({}^tA) = A$

Dim. 1. Notiamo che

$${}^t(\underbrace{A+B}_{\in M_{m,n}(\mathbb{R})}) \in M_{n,m}(\mathbb{R})$$

$$\underbrace{\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})} + \underbrace{{}^tB}_{M_{n,m}(\mathbb{R})}}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})}$$

Abbiamo dunque che sia a sinistra che a destra dell'uguale abbiamo matrici dello stesso tipo, dunque ha senso chiedersi se esse sono uguali.

per vedere che le due matrici sono uguali dimostriamo che tutte le loro entrate sono uguali, ovvero che

$$\begin{matrix}\forall i \in \{1,\dots,n\}\\ \forall j \in \{1,\dots,m\}\end{matrix} \qquad ({}^t(A+B))_{ij} = ({}^tA + {}^tB)_{ij}$$

fissiamo $i \in \{1,\dots,n\}$ e $j \in \{1,\dots,m\}$, allora

$$({}^t(A+B))_{ij} = (A+B)_{ji} = A_{ji} + B_{ji}$$

$$({}^tA + {}^tB)_{ij} = ({}^tA)_{ij} + ({}^tB)_{ij} = A_{ji} + B_{ji}$$

quindi le due quantità sono uguali.

2. Notiamo

$${}^t(\underbrace{{}^tA}_{\in M_{n,m}(\mathbb{R})}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$$

dunque ha senso chiedersi se ${}^t({}^tA) = A$; per mostrarlo, dimostriamo che tutte le entrate di queste due matrici sono uguali, ovvero

$$\begin{matrix}\forall i \in \{1,\dots,m\}\\ \forall j \in \{1,\dots,n\}\end{matrix} \qquad ({}^t({}^tA))_{ij} = A_{ij}$$

fissiamo $i \in \{1,\dots,m\}$ e $j \in \{1,\dots,n\}$, allora

$$({}^t({}^tA))_{ij} = ({}^tA)_{ji} = A_{ij}$$

Oss: non ha sempre senso chiedersi se vale $A = {}^tA$ perché queste due matrici in generale sono di tipo diverso; ha però senso chiederselo se la matrice è quadrata

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Questa matrice A soddisfa $A = {}^tA$

Def: sia $A \in M_n(\mathbb{R})$ (quindi A è una matrice quadrata); la matrice A si dice <u>simmetrica</u> se vale $A = {}^tA$; la matrice A si dice <u>antisimmetrica</u> se vale $A = -{}^tA$

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

questa matrice A soddisfa $A = -{}^tA$ ovvero è antisimmetrica

Oss: ogni matrice antisimmetrica ha la diagonale principale costituita da entrate tutte nulle.

Ora andiamo a introdurre una nuova operazione tra matrici.

Consideriamo questa situazione:

costo unitario della pasta $c_p = 1€$
costo unitario del latte $c_L = 2€$
costo unitario del uova $c_U = 3€$

Supponiamo di dover acquistare n_p, n_L, n_U unità di pasta, latte e uova.
Qual è il costo totale?

$$c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$

Formiamo una matrice 1×3 con i costi unitari e una matrice 3×1 con il numero di unità:

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} n_p \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix}$$

Definiamo il <u>prodotto righe per colonne</u> come

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_p \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix} := c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U$$

Più in generale, se abbiamo una matrice riga $1 \times n$ $(a_{11} \dots a_{1n})$ e una matrice colonna $n \times 1$ $\begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix}$, definiamo il loro prodotto righe per colonne come:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} := a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

Supponiamo che in un altro negozio valga

$$c'_p = -3€ \qquad c'_L = -2€ \qquad c'_U = -1€$$

Per tenere sotto controllo i due totali di spesa potrei impacchettare le due righe dei costi unitari in un'unica matrice:

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \\ c'_p & c'_L & c'_U \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R})$$

Potrebbe essere ragionevole definire il prodotto di

$$\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \\ c'_p & c'_L & c'_U \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} n_p \\ n_L \\ n_U \end{pmatrix}$$

come la matrice 2×1:

$$\begin{pmatrix} c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U \\ c'_p \cdot n_p + c'_L \cdot n_L + c'_U \, n_U \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$$

Ricapitolando, abbiamo moltiplicato una matrice 2×3 per una matrice 3×1 e abbiamo ottenuto una matrice 2×1. In altre parole, la matrice ottenuta dalla moltiplicazione è quella matrice le cui entrate sono date dalla moltiplicazione di ciascuna delle due righe della prima matrice con la colonna della seconda matrice.

In questo modo, se volessimo aggiungere una seconda colonna di quantità $\begin{pmatrix} n'_p \\ n'_L \\ n'_U \end{pmatrix}$, quello che andremmo a ottenere è una situazione del tipo:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} c_p & c_L & c_U \\ c'_p & c'_L & c'_U \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} n_p & n'_p \\ n_L & n'_L \\ n_U & n'_U \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} c_p \cdot n_p + c_L \cdot n_L + c_U \cdot n_U & c_p \cdot n'_p + c_L \cdot n'_L + c_U \cdot n'_U \\ c'_p n_p + c'_L \cdot n_L + c'_U \cdot n_U & c'_p n'_p + c'_L n'_L + c'_U n'_U \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

Ora siamo pronti per dare una definizione generale:

Def: sia $A \in M_{1,n}(\mathbb{R})$ e sia $B \in M_{n,1}(\mathbb{R})$; allora definiamo il prodotto $A \cdot B$ come il numero (o equivalentemente la matrice 1×1) dato da

$$A \cdot B = a_{11} b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k} \cdot b_{k1}$$

(questo è il prodotto di una riga per una colonna)

in generale, se $A \in M_{m,p}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{p,n}(\mathbb{R})$, allora il prodotto $A \cdot B$ è la matrice $m \times n$ la cui entrata di posto i,j è data da

$$(A \cdot B)_{ij} = \underbrace{A_{(i)}}_{i\text{-esima riga di } A} \cdot \underbrace{B^{(j)}}_{j\text{-esima colonna di } B}$$

$$= a_{i1} b_{1j} + \dots + a_{ip} b_{pj}$$

$$= \sum_{k=1}^{p} a_{ik} \cdot b_{kj}$$

Oss: il prodotto tra due matrici A e B è definito solo se il numero di colonne di A coincide con il numero di righe di B.

Esempio:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 2 + 2(-1) + (3 \cdot 0) \\ (-3) \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + (-1) \cdot 1 & (-3) \cdot 2 + (-2)(-1) + (-1) \cdot 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{3 \times 2}$$

Esempio:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{3 \times 3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}}_{2 \times 3}$$

Definizione: sia $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, allora la matrice <u>unità</u> è quella matrice quadrata $n \times n$ le cui entrate sono tutte nulle, fuorché quelle della diagonale principale, che sono tutte uguali a 1; denotiamo questa matrice con $\mathbb{1}_n$ (oppure I_n, oppure Id_n)

quindi vale che

$$(\mathbb{1}_n)_{ij} := \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases}$$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

vediamo che $A \cdot B \neq B \cdot A$