ESERCIZI SU MATRICI E SOTTOSPAZI
ALGEBRA LINEARE ED ELEMENTI DI GEOMETRIA
MATEMATICA PER L'ECONOMIA E LA STATISTICA 2
A.A. 2023/24

Esercizio 1

Considera le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcola:

- $(A \cdot B) \cdot C$
- $A \cdot (B \cdot C)$
- $A \cdot {}^tB$
- ${}^tB \cdot A$
- $(B + C) \cdot A$
- $(B \cdot A) + (C \cdot A)$
- $\underbrace{A \cdot A \cdots A}_{\text{6 volte}}$

Esercizio 2

Considera le matrici

$$P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

e la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Calcola

- $(P_{12} \cdot P_{12})$ e $(P_{13} \cdot P_{13})$ e $(P_{23} \cdot P_{23})$
- $(P_{12} \cdot A)$ e $(P_{13} \cdot A)$ e $(P_{23} \cdot A)$
- $(A \cdot P_{12})$ e $(A \cdot P_{13})$ e $(A \cdot P_{23})$

Noti qualcosa?

Esercizio 3

Considera una matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ (ovvero A è una matrice quadrata con n righe ed n colonne). **Dimostra** che le matrici

$$A + {}^tA \quad \text{e} \quad A - {}^tA$$

sono rispettivamente una matrice simmetrica e una matrice antisimmetrica. Usa questo fatto per mostrare che ogni matrice quadrata è la somma di una matrice simmetrica e di una matrice antisimmetrica.

Esercizio 4

Ricorda che abbiamo introdotto quattro matrici 2×2:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e abbiamo visto che data una qualsiasi matrice 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

allora vale che

$$A = a_{11}E + a_{12}F + a_{21}G + a_{22}H\,, \tag{$*$}$$

ovvero abbiamo espresso A come una *combinazione lineare* delle matrici E, F, G e H. **Dimostra** che l'espressione ($*$) è l'*unico* modo di scrivere A come combinazione lineare di E, F, G e H, ovvero che se vale

$$A = \lambda_1 E + \lambda_2 F + \lambda_3 G + \lambda_4 H\,,$$

per qualche $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, allora deve essere

$$\lambda_1 = a_{11}\,, \quad \lambda_2 = a_{12}\,, \quad \lambda_3 = a_{21}\,, \quad \lambda_4 = a_{22}\,.$$

Esercizio 5

Ricorda che abbiamo visto che se $\mathcal{F}$ è l'insieme delle funzioni $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (le cosiddette "funzioni reali di variabile reale"), allora possiamo definire due operazioni:

$$\begin{array}{rccc} (+): & \mathcal{F} \times \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (f,g) & \mapsto & f+g \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{rccc} (\cdot): & \mathbb{R} \times \mathcal{F} & \to & \mathcal{F} \\ & (\lambda,f) & \mapsto & \lambda \cdot f \end{array}$$

dove la funzione $f+g$ è definita da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)\,,$$

mentre la funzione $\lambda \cdot f$ è definita da

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\lambda \cdot f)(x) := \lambda\, f(x)\,.$$

Con queste due operazioni, la terna $(\mathcal{F}, +, \cdot)$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale. **Verifica** che il sottoinsieme $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}$ dato da

$$\mathcal{F}_0 := \{ f \in \mathcal{F} \mid f(0) = 0 \}$$

è un sottospazio vettoriale di $(\mathcal{F}, +, \cdot)$.

Esercizio 6

Una matrice quadrata si dice *diagonale* se tutte le sue entrate al di fuori della diagonale principale sono nulle (le entrate della diagonale possono essere sia nulle che non nulle). Pertanto, una matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ è diagonale se e solo se è della forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$$

con $a_{11}, a_{22} \in \mathbb{R}$. **Dimostra** che l'insieme

$$\mathcal{D}_2 := \{ A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \text{ è diagonale} \}$$

è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.