Lezione 11 ottobre 2023

mercoledì 11 ottobre 2023 11:02

Se V è uno SV su K campo, gli elementi di K verranno chiamati SCALARI.

Def.: V SV su K. Un sottoinsieme $W \subseteq V$ si dice SOTTOSPAZIO VETTORIALE se $W \neq \emptyset$ e valgono:

(W1) $\forall\, w_1 \in W$, e $\forall\, w_2 \in W$ si ha

$$w_1 + w_2 \in W$$

diremo che W è CHIUSO RISP. alla $+$.

(W2) $\forall\, w \in W$ e $\forall\, c \in K$ si ha

$$c \cdot w \in W$$

diremo che W è CHIUSO RISP. al PRODOTTO per SCALARI.

oss 1: Sia $W \neq \emptyset$, $W \subseteq V$, V SV.

Allora (W1) & (W2) $\Longleftrightarrow$ $\forall\, w_1, w_2 \in W$ e $\forall\, a, b \in K$, si ha $a w_1 + b w_2 \in W$. (*)

Infatti: (W2) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} a w_1 \in W \\ b w_2 \in W \end{array}\right\} \xrightarrow{(W1)}$

$a w_1 + b w_2 \in W$

Viceversa: se vale (*), allora in part.

$\forall\, w_1, w_2 \in W$, $\underbrace{1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2}_{= w_1 + w_2} \in W$

$a = b = 1$ unità di K

$\Rightarrow$ vale (W1)

Inoltre, se vale (*), allora in particolare

$\forall\, w_1, w_2 \in W$, $a w_1 + 0 \cdot w_2 \in W$

$b = 0$ $\qquad a \cdot w_1 \in W$

oss: Se $W \subseteq V$ è un SSV (sottospazio vettoriale), allora se cons.

$(W, +)$ e con $\cdot$ prodotto per scalari di K è a sua volta uno SPAZIO VETTORIALE su K.

Esempi:

① Caso banale: $W = V$ è SSV e si chiama SSV IMPROPRIO

② $W = \{0_V\}$ con 0_V è il vettore nullo di V

verifichiamo che è SSV:

usiamo ⊛ cons. $w_1, w_2 \in W = \{0_V\}$

$w_1 = 0_V = w_2$, siano $a, b \in K$

$$a \cdot w_1 + b \cdot w_2 = a \cdot 0_V + b \cdot 0_V = 0_V + 0_V = 0_V \in W$$

$\{0_V\}$ si chiama SSV BANALE o NULLO.

oss.: Se $W \subseteq V$ è SSV, allora $0_V \in W$

infatti: $W \neq \emptyset$, $\exists\, w \in W$

(w2) cons. $0 \in K$: $\underset{= 0_V}{0 \cdot w} \in W$

③ $V = \mathbb{R}^2$ SV su $\mathbb{R}$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 3x - y = 0 \right\}$$

$W \neq \emptyset$? $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in W$

⊛ $w_1, w_2 \in W$

$w_1 = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$, $\boxed{\begin{array}{l} 3a_1 - a_2 = 0 \\ 3b_1 - b_2 = 0 \end{array}}$ ⊛⊛

$c, d \in \mathbb{R}$

$$c \cdot w_1 + d \cdot w_2 = c \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + d \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 \\ c \cdot a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d \cdot b_1 \\ d \cdot b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \cdot a_1 + d \cdot b_1 \\ c \cdot a_2 + d \cdot b_2 \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot (c a_1 + d \cdot b_1) - (c \cdot a_2 + d b_2) = c \cdot \overbrace{(3a_1 - a_2)}^{=0} + d\, \overbrace{(3b_1 - b_2)}^{=0} = c \cdot 0 + d \cdot 0 = 0$$

$\longrightarrow c \cdot w_1 + d\, w_2 \in W$

W è SSV e si chiama RETTA VETTORIALE.

④ $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}) = \{ f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ funzione} \}$

Cons. $Cost(\mathbb{R}) = \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ è costante}\}$
$\subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$

è ssv? sì.

$C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$
$\subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$

è ssv? sì

$C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ derivabile con derivata continua}\}$

è ssv? sì

$C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \dots \subseteq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq C^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{F}(\mathbb{R})$
$\parallel$ SONO TUTTI SSV
$\{f \mid f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f \text{ ammette derivate di ogni ordine } k\in\mathbb{N}\}$

oss.

$$\begin{tikzcd} Cost(\mathbb{R}) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] \\ & \mathbb{R}[x] \end{tikzcd}$$

$\mathbb{R}[x]$ polinomi in x

$f(x) = c$ polinomio di grado 0

Vediamo: $C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) \subseteq C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$\rotatebox{90}{$\in$}$
$f \Rightarrow f$ ammette f' e $f'' = (f')'$
quindi la funzione f' è continua
(funzioni derivabili $\Rightarrow$ continue)

$Cost(\mathbb{R}) \subseteq C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$
$\rotatebox{90}{$\in$}$
$f,\ \forall x\in\mathbb{R}: f(x) = k \in \mathbb{R}$ k costante

$f'(x) = 0 \in \mathbb{R}$

$f''(x) = 0$

$f'''(x) = 0$

$\vdots$

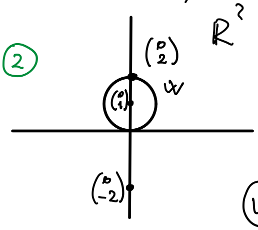
$\mathbb{R}[x] \subsetneq C^{\infty}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ SSV

$\in$ $e^x, \sin x, \cos x, \dots$

ESEMPI DI SOTTOINS. che NON sono SSV:

① $V=\mathbb{R}^2$, $W=\left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \mid 3x-y=1\right\}$

W non è ssv; il vettore nullo $0_{\mathbb{R}^2}=\binom{0}{0}\notin W$.

② 

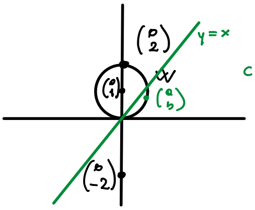
$W=\left\{\binom{x}{y}\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+(y-1)^2=1\right\}$

$\binom{0}{0}\in W$

$\boxed{W2}$: $\forall\, w\in W,\ \underset{=-w}{(-1)\cdot w}\in W$

$\binom{0}{2}\in W$: $0^2+(2-1)^2=1$ ✓

$\binom{0}{-2}\notin W$: $0^2+(-2-1)^2=9\neq 1$



$c\cdot\binom{a}{b}$, $c\in\mathbb{R}$

$\binom{1}{1}\in W$? sì

$1^2+(1-1)^2=1$

$c\cdot\binom{1}{1}=\binom{c}{c}$: verifichiamo

$\left\{\binom{c}{c} \mid c\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\binom{x}{y} \mid \overset{y=x}{y=x}\right\}$

② $V=\mathbb{R}[x]$, $W=\mathbb{R}[x]_d=\{p(x) \mid \text{grado di } p=d\}$

$d\geq 1$

$d=1$: $W=\{a_0+a_1x \mid a_0,a_1\in\mathbb{R},\ a_1\neq 0\}$

$d=3$: $W=\{a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3 \mid a_0,a_1,a_2,a_3\in\mathbb{R},\ a_3\neq 0\}$

$(3x^3-1)+(-3x^3+2x^2+8)=2x^2+7$ non ha grado 3

INVECE: $W=\mathbb{R}[x]_{\leq d}=\{p(x) \mid \text{grado di } p \text{ è } \leq d\}$

$d=3$ $(x^3+1)+(2x^3-x^2)=3x^3-x^2+1$

$$(x^3+1) + (-x^3+2x^2) = 2x^2+1$$

~ . ~ . ~ . ~

Pb: PRODURRE SSV

COMBINAZIONI LINERI
DI VETTORI

Def: Cons. $v_1, \dots, v_k \in V$ vettori

Una COMBINAZIONE LINEARE di $v_1, \dots, v_k$

è un vettore del tipo $c_1 \cdot v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$

dove $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}$

Def.: Siano $v_1, \dots, v_k \in V$; poniamo

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) := \{a_1 v_1 + \dots + a_k v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}\}$$

= sottoinsieme di tutte le combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k$

(nelle note: $\langle v_1, \dots, v_k \rangle = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$)

Caso particolare: $k = 1$

$$\mathrm{Span}(v_1) = \{a_1 \cdot v_1 \mid a_1 \in \mathbb{K}\}$$

Due casi:
- $v_1 = 0_V \Rightarrow \mathrm{Span}(0_V) = \{0_V\}$
- $v_1 \neq 0_V \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1) \neq \{0_V\}$ si chiama RETTA VETTORIALE

Caso successivo:

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) = \{a_1 v_1 + a_2 v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$$

Casi:
- $v_1 = 0_V \Rightarrow \mathrm{Span}(0_V, v_2) = \{a_1 \cdot 0_V + a_2 \cdot v_2 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$
  $= \{a_2 v_2 \mid a_2 \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Span}(v_2)$

- $v_2 = c \cdot v_1$, $c \in \mathbb{K}$

$$\mathrm{Span}(v_1, c \cdot v_1) = \{a_1 v_1 + a_2 (c \cdot v_1) \mid a_1, a_2 \in \mathbb{K}\}$$

$$= \{ \underbrace{(a_1 + c \cdot a_2)} \cdot v_1 \mid a_1, a_2 \in \mathbb{K} \}$$

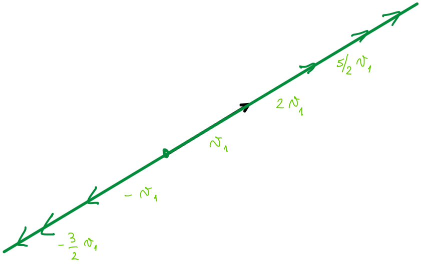
$$= \text{Span}(v_1)$$

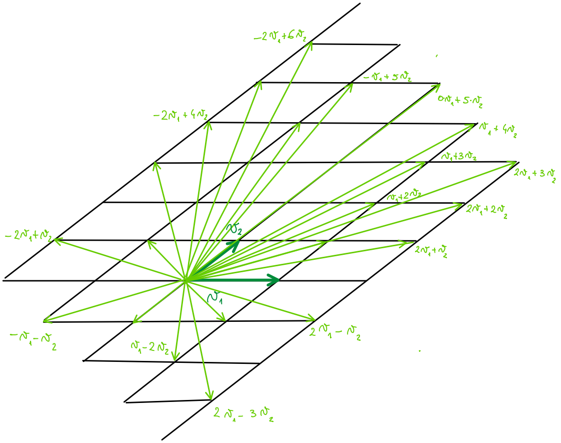
- $v_2 \neq c \cdot v_1$ per alcuna costante $c \in \mathbb{K}$

  $v_1 \neq 0_V$

Span(v_1, v_2) si dice PIANO VETTORIALE

Es: V^2 : Span(v_1)



Span(v_1, v_2)