12 ottobre

La prossima settimana le mie lezioni di giovedì 19 e venerdì 20 sono cancellate

Il tutorato inizia il venerdì 27 ottobre dalle 16-18 qui.

Es 1.2 Verificare

$$\lim_{n\to+\infty} \underbrace{\frac{n+4}{n^2+1}}_{x_n} = 0$$

usando la definizione di limite, cioè dimostro che

$$\boxed{\forall \varepsilon>0 \quad \exists K_\varepsilon \ \text{t.c.} \quad n > K_\varepsilon \Rightarrow |x_n| < \varepsilon}$$

Siccome $x_n = \frac{n+4}{n^2+1} > 0 \quad \forall n$ allora

$$|x_n| < \varepsilon \iff x_n < \varepsilon$$

Prendo $\varepsilon > 0$ arbitrario ed esamino

(0) $\quad \frac{n+4}{n^2+1} < \varepsilon$ e risolvo la disuguaglianza rispetto ad n.

$$n + 4 < \varepsilon(n^2+1)$$

$$\varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 4 > 0 \qquad (1)$$

$$\Delta_\varepsilon = 1 - 4\varepsilon(\varepsilon-4) = 1 + 16\varepsilon - 4\varepsilon^2$$

L'equazione $\varepsilon n^2 - n + \varepsilon - 4 = 0$ (2) ha radici $n_\pm = \frac{1}{2\varepsilon} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2\varepsilon}$

Se $\Delta_\varepsilon < 0$ la (1) è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$

posso prendere $K_\varepsilon = 0$ e ho che $n > K_\varepsilon \Rightarrow$ (0)

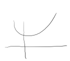
Se $\Delta_\varepsilon = 0 \Rightarrow n_+ = n_- = \frac{1}{2\varepsilon}$

Posto $K_\varepsilon = \frac{1}{2\varepsilon}$ risulta che $n > \frac{1}{2\varepsilon} \Rightarrow$ (0)

Se $\Delta_\varepsilon > 0$ allora l'equazione (2) ha due soluzioni n_- ed n_+ dove $n_- < n_+$. Se scelgo $K_\varepsilon = n_+$ allora $n > K_\varepsilon \Rightarrow$ (0)

~~Dato~~ Data $f(x) = ax^2 + bx + c \qquad a > 0$

se $\Delta < 0 \Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$



$$\left(x_\pm = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \right)$$

Se $\Delta = 0 \Rightarrow \left(x \neq x_+ = x_- \Rightarrow f(x) > 0 \right)$

Se $\Delta > 0 \Rightarrow \left(x < x_- \text{ o } x > x_+ \Rightarrow f(x) > 0 \right)$

1.3 n. 2

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{n^2 - 3n - 5}{-2n}}_{x_n} = -\infty \qquad\qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{n^{\cancel{2}}}{-2\cancel{n}}$$

Bisogna verificare

$$\boxed{\forall M > 0 \quad \exists K_M \text{ t.c. } n > K_M \Rightarrow x_n < -M}$$

Esaminiamo $x_n < -M$

$$\frac{n^2 - 3n - 5}{-2n} < -M \qquad \cdot\, -2n$$

$$n^2 - 3n - 5 > 2Mn$$

$$n^2 - (3 + 2M)n - 5 > 0$$

$$\Delta = (3 + 2M)^2 + 20 > 0 \qquad \forall M > 0$$

Le radici del polinomio sono

$$n_\pm = \frac{3 + 2M}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$$

con $n_- < n_+$

Scelgo $K_M = n_+$. Allora $n > K_M \Rightarrow x_n < -M$.

Per casa, dimostrare

1) Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} \operatorname{sen}(x)$ non esiste

2) Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} \cos(x)$ non esiste

3) Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo $T > 0$ ed f non sia una funzione costante. Dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non esiste.

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{\left(x^n+x+1\right)^{\frac{1}{n}}}_{a}-\underbrace{\left(x^n+x^{n-1}-x-1\right)^{\frac{1}{n}}}_{b}\right]$$

per $n=2$ si usa $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

per n generico si usa

$$(a-b)\sum_{j=1}^{n} a^{j-1}\, b^{n-j} = a^n-b^n$$

$$\left[(x^n+x+1)^{\frac{1}{n}}-(x^n+x^{n-1}-x-1)^{\frac{1}{n}}\right]\frac{\sum_{j=1}^{n}(x^n+x+1)^{\frac{j-1}{n}}(x^n+x^{n-1}-x-1)^{\frac{n-j}{n}}}{\sum_{j=1}^{n}(x^n+x+1)^{\frac{j-1}{n}}(x^n+x^{n-1}-x-1)^{\frac{n-j}{n}}}$$

$$=\frac{\cancel{x^n}+x+1-(\cancel{x^n}+x^{n-1}-x-1)}{\sum_{j=1}^{n}(x^n+x+1)^{\frac{j-1}{n}}(x^n+x^{n-1}-x-1)^{\frac{n-j}{n}}}$$

$n>2$

$n-1>1$

$$=\frac{-x^{n-1}+2x+2}{\sum_{j=1}^{n}\left(x^n\left(1+\underbrace{\frac{1}{x^{n-1}}+\frac{1}{x^n}}_{o(1)}\right)\right)^{\frac{j-1}{n}}\left(x^n\left(1+\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^{n-1}}-\frac{1}{x^n}}_{o(1)}\right)\right)^{\frac{n-j}{n}}}$$

$$=\frac{-x^{n-1}\left(1\underbrace{-\frac{2}{x^{n-2}}-\frac{2}{x^{n-1}}}_{o(1)}\right)}{\sum_{j=1}^{n}\underbrace{x^{j-1}\qquad x^{n-j}}_{x^{n-1}}(1+o(1))}$$

$$=\frac{-\cancel{x^{n-1}}}{\cancel{x^{n-1}}\sum_{j=1}^{n}(1+o(1))}$$

$$=\frac{-1\qquad(1+o(1))}{\sum_{j=1}^{n}1+\sum_{j=1}^{n}o(1)}$$

$$=\frac{-1\,(1+o(1))}{n+o(1)}$$

$$=\frac{-1}{n}\qquad\frac{1+o(1)}{1+o(1)}=-\frac{1}{n}(1+o(1))$$

$$\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{n}(1+o(1))=\lim_{x\to+\infty}-\frac{1}{n}=-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{5^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 2^n}$$

$$\frac{5^{n+1} + 4^{n+1}}{3^n + 2^n} = \frac{5^{n+1}\left(1 + \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}\right)}{3^n\left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}$$

0

0

$$= \underbrace{5\left(\frac{5}{3}\right)^n \left(1 + o(1)\right)}$$

$$\Big\downarrow\ n + \infty$$

$$5 \quad +\infty \quad 1 = +\infty$$

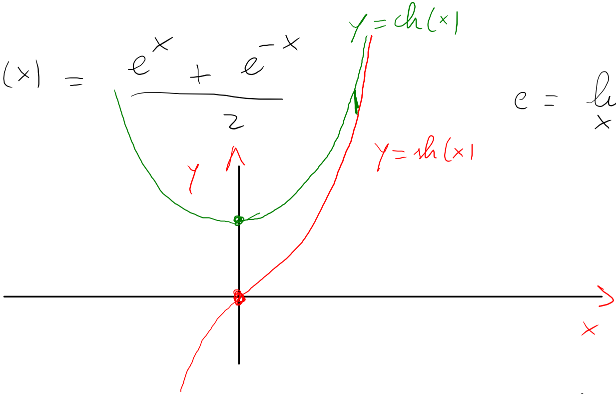
Funzioni iperboliche

$\sinh(x)$ $\qquad$ $\cosh(x)$ $\qquad$ $\tanh(x) = \dfrac{sh(x)}{ch(x)}$

$sh(x)$ $\qquad$ $ch(x)$ $\qquad$ $th(x)$

$$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad th(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$ch(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad e = \lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$



$$th(x) = \frac{sh(x)}{ch(x)}$$