

Forme differenziali:

Partiamo definendo il DIFFERENZIALE df di una funzione $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$

Esso è una 1-FORMA (cioè un funzionale lineare che agisce su $V = \mathbb{R}^m$) def. nel seguente modo:

$$df[\bar{v}] \equiv \sum_i v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \bar{v} \in \mathbb{R}^m$$

Siccome è un funz. lin., esso appartiene a uno sp. vet., detto spazio duale V^* di V . \exists una base di V^* :

- prendiamo le funz. coord. $x_i: \bar{x} \in \mathbb{R}^m \rightarrow x_i$ (es. $f(x) = x$ in \mathbb{R})

- i diff. di tali funz. dx_i agiscono nel seguente modo:

$$dx_i[\bar{v}] = \sum_j v_j \frac{\partial x_i}{\partial x_j} = v_i$$

$$\Rightarrow df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \quad (*)$$

$\leadsto \{dx_1, \dots, dx_m\}$ sono base di V^* ;

in particolare essa è la base duale di $e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$

Per una generica manifold M , df è una sezione del FIBRATO COTANGENTE (la cui fibra sul pt p è lo sp. vet. duale dello sp. tangente in p).

$$df \in T^*M \quad \text{con} \quad f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

che $df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$

curva su M che
passa per p a $t=0$

Vediamo come agisce su $v \in T_p M \leftarrow v = \frac{d}{dt} \gamma(t) \Big|_{t=0}$

$$\hookrightarrow df(p)[v] = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} \leftarrow \text{coincide con } (*)$$

In una carta locale la curva γ è data

dalle funzioni $x^\mu(t)$ $\mu=1, \dots, d$, con $v^\mu = \dot{x}^\mu = dx^\mu[v]$

$$df(p)[v] = \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) \Big|_{t=0} = \partial_\mu f \dot{x}^\mu = v^\mu \partial_\mu f$$

$$= \partial_\mu f dx^\mu[v]$$

$$\rightarrow df = \partial_\mu f dx^\mu$$

Il differenziale di una funzione è un esempio
di 1-FORMA DIFFERENZIALE.

In generale

$$\omega \in T^*M$$

$$\omega(p) = \omega_\mu(p) dx^\mu$$

Un esempio di 1-forma^(*) in fisica: CAMPO DI GAUGE

$$A(x) = A_\mu^{(x)} dx^\mu$$

(*) In realtà A è una connessione con regole di incollamento tra diverse carte che sono modificate rispetto a quelle di una 1-forma propriamente detta.

TENSORI e p-FORME

Dati due spazi vettoriali: V e W di dim n e m , posso definire un nuovo spazio vett. , detto prodotto tensore $V \otimes W$, nel seguente modo:

- prendo una base $\{v_i\}_{i=1, \dots, n}$ di V e una base $\{w_k\}_{k=1, \dots, m}$ di W ;
- introduco un set astratto di $n \cdot m$ vettori
$$e_{ij} \equiv v_i \otimes w_j \quad i=1, \dots, n \quad j=1, \dots, m$$
- def. $V \otimes W = \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Lambda_{ij} v_i \otimes w_j \mid \Lambda_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$
cioè def. $V \otimes W$ come l'insieme delle combinazioni lineari dei vettori e_{ij} .

Un caso particolare è quando $W=V$: $e_{ij} = v_i \otimes v_j$

Posso anche def. $\underbrace{V \otimes V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{N \text{ fattori}}$:

- in qto caso la base di pto sp. vett. è
$$v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_N} \quad i_k = 1, \dots, n$$

e i coeff. delle combinazioni lineari sono degli oggetti $\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ con N indici.

- la dim. dello sp. è n^N .

$\Lambda_{i_1 \dots i_N}$ sono detti TENSORI.

Come da uno sp. vett. posso costruire un FIBRATO VETT.
 così posso fare per FIBRATI VETT. la cui fibre
 sono PRODOTTI TENSORI di sp. vett. che sono fibre
 di altri fibret. vett. su M .

L'esempio più comune è prendere come fibre

$$\underbrace{T_p^*(M) \otimes T_p^* M \otimes \dots \otimes T_p^* M}_{m\text{-volte}}$$

Un elemento di tale fibret è un TENSORE
 le cui componenti hanno m -indici.

In questo modo si costruiscono le **p-FORME differenziali**:

Vediamo una 2-FORMA

• dx^μ base per T^*M

• $dx^\mu \otimes dx^\nu$ base per $T^*M \otimes T^*M$

• possiamo costruire un sottosp. prendendo un sottoinsieme
 di elem. di base, in particolare

$$\underbrace{dx^\mu \otimes dx^\nu - dx^\nu \otimes dx^\mu}_{\equiv dx^\mu \wedge dx^\nu} \leftarrow \text{COMBINAZ. ANTISIMM.}$$

$$\equiv dx^\mu \wedge dx^\nu \quad (= -dx^\nu \wedge dx^\mu)$$

• una comb. lineare

$$\frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

è dette 2-forme

Prendetemo

$\omega_{\mu\nu}$ TENSORE ANTISIMMETRICO

a due indici

In gen. $\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} + \omega_{\nu\mu}) + \frac{1}{2}(\omega_{\mu\nu} - \omega_{\nu\mu})$
 solo sto separare incomb.

In generale una p -forma è una comb. l'u.

$$\frac{1}{p!} \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}}_{\text{prodotto compl. antisim.}} \in \Lambda^p T^*M$$

Tensor compl. antisim. ← somma è su tutti μ_i ; ma con overcount elem. di base
1/p! fa sì che $\omega_{\mu_1 \dots \mu_p}$ sono coeff. rispetto esp base.

• Il simbolo \wedge può essere esteso a due generiche forme

$$\alpha_p \wedge \beta_q = \frac{1}{p!q!} (\alpha_p)_{\mu_1 \dots \mu_p} (\beta_q)_{\nu_1 \dots \nu_q} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \wedge dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_q}$$

DETTO WEDGE PRODUCT

$$\rightarrow \alpha_p \wedge \beta_q = (-1)^{pq} \beta_q \wedge \alpha_p$$

In componenti:

$$(\alpha_p \wedge \beta_q)_{\mu_1 \dots \mu_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} (\alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\mu_{p+1} \dots \mu_{p+q}} \pm \text{permutations})$$

NOTA: Il wedge prod. di due 1-forme è una 2-forma, ma non tutte le 2-forme possono essere scritte come wedge prod. di due 1-forme.

Esempi:

$$- \beta \in T^*M \quad \omega \in \Lambda^2 T^*M \quad \beta = \beta_i dx^i \quad \omega = \frac{1}{2} \omega_{kl} dx^k dx^l$$

$$(\beta \wedge \omega)_{ijk} = (\beta_i \omega_{jk} - \beta_j \omega_{ik} + \beta_k \omega_{ij})$$

$$\beta \wedge \omega = \frac{1}{3!} (\beta_i \omega_{jk} - \beta_j \omega_{ik} + \beta_k \omega_{ij}) dx^i dx^j dx^k =$$

$$= \frac{1}{3!} (\beta_i \omega_{jk} dx^{ijk} + \beta_j \omega_{ik} dx^{jik} + \beta_k \omega_{ij} dx^{kij}) = \frac{1}{2} \beta_i \omega_{jk} dx^i dx^j dx^k$$

in $d=3 \quad \beta \wedge \omega = (\beta_1 \omega_{23} - \beta_2 \omega_{13} + \beta_3 \omega_{12}) dx^3$

$$- \alpha, \beta \in \Lambda^2 T^*M \quad d=4$$

$$(\alpha \wedge \beta)_{\mu_1 \dots \mu_4} = \frac{1}{4} \cdot 4 \left(\alpha_{\mu_1 \mu_2} \beta_{\mu_3 \mu_4} - \alpha_{\mu_1 \mu_3} \beta_{\mu_2 \mu_4} \right. \\ \left. + \alpha_{\mu_1 \mu_4} \beta_{\mu_2 \mu_3} + \alpha_{\mu_2 \mu_3} \beta_{\mu_1 \mu_4} \right. \\ \left. - \alpha_{\mu_2 \mu_4} \beta_{\mu_1 \mu_3} + \alpha_{\mu_3 \mu_4} \beta_{\mu_1 \mu_2} \right)$$

$$- \alpha \in \Lambda^2 T^*M \quad d=4$$

$$(\alpha \wedge \alpha)_{\mu_1 \dots \mu_4} = 2 \left(\alpha_{\mu_1 \mu_2} \alpha_{\mu_3 \mu_4} - \alpha_{\mu_1 \mu_3} \alpha_{\mu_2 \mu_4} \right. \\ \left. + \alpha_{\mu_1 \mu_4} \alpha_{\mu_2 \mu_3} \right)$$

Differenziale d

d è un operatore che mappa p forme in $p+1$ -forme

$$d: \Lambda^p T^*M \rightarrow \Lambda^{p+1} T^*M$$

funzioni su M



Vediamo come agisca su $\omega \in \Lambda^p T^*M$ $\omega = \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}$

$$d: \omega \mapsto \underbrace{\frac{1}{p!} d(\omega_{\mu_1 \dots \mu_p})}_{1\text{-forme}} \wedge \underbrace{dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}}_{p+1\text{-forme}}$$

In componenti:

$$(d\omega)_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} = \frac{1}{(p+1)!} \left[\partial_{\mu_1} \omega_{\mu_2 \dots \mu_{p+1}} - (-1)^{p+1} \partial_{\mu_2} \omega_{\mu_1 \dots \mu_{p+1}} \right. \\ \left. \pm \text{cyclic permutation} \right]$$

Relazione utile:

$$d(\alpha_k \wedge \beta_l) = d\alpha_k \wedge \beta_l + (-1)^k \alpha_k \wedge d\beta_l \quad \leftarrow \text{consist. con } d(dx^\mu) = 0$$

$$\underline{d^2 = 0} \quad \leftarrow \text{molto importante}$$

Esempi:

$$- \omega = \omega_\nu dx^\nu \quad \rightarrow \quad d\omega = (d\omega_\nu) dx^\nu = \partial_\mu \omega_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu \\ = \frac{1}{2} (\partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu) dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$\rightarrow (d\omega)_{\mu_1 \mu_2} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu_1} \omega_{\mu_2} - \partial_{\mu_2} \omega_{\mu_1})$$

Se $\omega = A$ (campo di gauge)

$$\text{allora } F \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu \quad \downarrow \\ = dA$$

\rightarrow la curvatura è il differenziale del campo di gauge.

- Verifichiamo che $d^2 = 0$ su 0-forme e 1-forme;

$$\bullet d(df) = d(\partial_\mu f dx^\mu) = d(\partial_\mu f) \wedge dx^\mu = \\ = \partial_\nu \partial_\mu f dx^\nu \wedge dx^\mu = 0 \quad (S_{\mu\nu} A^{\mu\nu} = 0)$$

$$\bullet d(d\omega) = d(\partial_\mu \omega_\nu dx^\mu \wedge dx^\nu) =$$

$$= d(\partial_\mu \omega_\nu) \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = \partial_\sigma \partial_\mu \omega_\nu dx^\sigma \wedge dx^\mu \wedge dx^\nu = 0$$

In generale $d(dw_p) = d(\partial_\sigma \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\sigma \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}) =$
 $= \partial_\sigma \partial_\sigma \omega_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\sigma \wedge dx^\sigma \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = 0.$

Hodge star.

It is an isomorphism $*$: $\Lambda^k T^*M \rightarrow \Lambda^{d-k} T^*M$

- Def. $(\alpha, \beta) = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} \beta_{\nu_1 \dots \nu_p} g^{\mu_1 \nu_1} \dots g^{\mu_p \nu_p}$ $g_{\mu\nu}$ è la metrica su M .
- $\beta \in \Lambda^k T^*M$, allora $*\beta$ è l'unica $(d-k)$ -form che soddisfa $\alpha \wedge (*\beta) = (\alpha, \beta) dVol_M$ $\forall \alpha \in \Lambda^k T^*M$ (0)

- Ricordiamo che se è def. una metrica g su M ,
 $dVol_M = \sqrt{|g|} dx^1 \wedge \dots \wedge dx^d$ ($\sqrt{|g|} \rightarrow \sqrt{g}$ se Mink. sign.)
 $\equiv d^d x \sqrt{|g|} \frac{1}{d!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$

- Propr. utile $*(*\beta) = (-1)^{k(d-k)} \beta$

- In particolare $*dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} = \frac{1}{(d-p)!} \sqrt{|g|} \epsilon^{\mu_1 \dots \mu_p \mu_{p+1} \dots \mu_d} dx^{\mu_{p+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_d}$

In componenti: $\alpha \in \Lambda^p T^*M$

$$(*\alpha)_{\mu_1 \dots \mu_{d-p}} = \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p} \nu_1 \dots \nu_p} g^{\nu_1 \rho_1} \dots g^{\nu_p \rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p} \sqrt{|g|}$$

$$*\alpha = \frac{1}{(d-p)!} \frac{1}{p!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_{d-p} \rho_1 \dots \rho_p} \alpha_{\rho_1 \dots \rho_p} \sqrt{|g|} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_{d-p}}$$

Esempi:

$$\begin{aligned}
 - \star dx^1 \dots dx^p &= \frac{1}{(d-p)!} \sqrt{g} \epsilon^{1 \dots p \mu_1 \dots \mu_d} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_d} = \\
 &= \frac{(d-p)!}{(d-p)!} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_d} \sqrt{g} = \sqrt{g} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_d}
 \end{aligned}$$

Ora, verifichiamo (6)

$$\rightarrow \underbrace{dx^1 \dots dx^p} \wedge \star dx^1 \dots dx^p = \sqrt{g} dx^1 \dots dx^d = \text{vol}_M$$

$$\delta^1_{\mu_1} \dots \delta^p_{\mu_p} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p} = \frac{1}{p!} \underbrace{(\delta^1_{\mu_1} \dots \delta^p_{\mu_p} \pm \text{perm.})}_{p! \text{ terms}} dx^{\mu_1} \dots dx^{\mu_p}$$

$$\begin{aligned}
 (dx^1 \dots dx^p, dx^1 \dots dx^p) &= \frac{1}{p!} \left(\begin{matrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{matrix} \right) g^{-1 \mu \nu} \\
 &= \frac{1}{p!} \underbrace{(g^{1\mu_1} \dots g^{p\mu_p} \pm \text{perm.}(g))}_{\neq 0} \underbrace{(\delta^1_{\mu_1} \dots \delta^p_{\mu_p} \pm \text{perm.})}_{=0} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dx^{1 \dots p} \wedge \star dx^{1 \dots p} = (dx^{1 \dots p}, dx^{1 \dots p}) \text{ vol}_M$$

$$\begin{aligned}
 - \alpha \in T^*M \quad \text{in } d=3 \quad \alpha &= \alpha_i dx^i \\
 (\star \alpha)_{jk} &= \frac{1}{1!} \epsilon_{jke} g^{em} \alpha_m \sqrt{g} \quad \xrightarrow{g=1} \quad \epsilon_{jke} \delta^{em} \alpha_m = \\
 &= \sum_m \epsilon_{jkm} \alpha_m
 \end{aligned}$$

$$- \beta \in \Lambda^2 T^*M \quad \text{in } d=3 \quad \beta = \frac{1}{2} \beta_{ij} dx^i \wedge dx^j$$

$$(\star \beta)_k = \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \beta_{lm}$$

- In 3d, prendiamo vettori $\bar{v} = v_i \bar{e}_i$ $\bar{w} = w_i \bar{e}_i$ e associamo gli

$$\text{1-forme } v = v_i dx^i \quad w = w_i dx^i$$

$$v \wedge w = v_i w_j dx^i \wedge dx^j = \frac{1}{2} (v_i w_j - v_j w_i) dx^i \wedge dx^j$$

$$*(v \wedge w)_k = \frac{1}{2} \epsilon_{kem} (v_e w_m - v_m v_e) = \epsilon_{kem} v_e w_m$$

$$*(v \wedge w) \longleftrightarrow \bar{v} \times \bar{w} \quad \text{in } 3d$$

- $\beta \in T^*M$ in $d=3$

$$\frac{1}{3!} (\beta \wedge * \alpha)_{ijk} dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k \stackrel{d=3}{=} (\beta \wedge * \alpha)_{123} d^3x$$

$$= \frac{1}{3!} (\beta_i \epsilon_{jke} \delta^{lm} \alpha_m - \beta_j \epsilon_{ike} \delta^{lm} \alpha_m + \beta_k \epsilon_{ije} \delta^{lm} \alpha_m) \cdot dx^i \wedge dx^j \wedge dx^k$$

$$\begin{aligned} (\beta \wedge * \alpha)_{123} &= \sum_e (\beta_1 \epsilon_{23e} \alpha_e - \beta_2 \epsilon_{13e} \alpha_e + \beta_3 \epsilon_{12e} \alpha_e) = \\ &= \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} \quad (d=3) \end{aligned}$$

$$\beta \wedge * \alpha = \bar{\beta} \cdot \bar{\alpha} d^3x \Rightarrow \beta \wedge * \alpha = (\beta, \alpha) d^3x$$

$$- \omega = \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu$$

$$(*\omega)_{\sigma} = \frac{1}{2} \epsilon_{\sigma\alpha\beta\gamma} g^{\alpha\alpha} g^{\beta\beta} \omega_{\alpha\beta}$$

in $d=4$
Minkowski

$$(\omega, \omega) = \omega_{\mu\nu} \omega_{\alpha\beta} g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta} \sqrt{g} d^4x$$

$$(\omega \wedge *\omega)_{\mu_1 \dots \mu_4} = \frac{1}{2} \left(\omega_{\mu_1 \mu_2} \sqrt{g} \epsilon_{\mu_3 \mu_4}^{\mu_1 \mu_2} \omega_{\sigma} - 1324 + 1423 + 2314 - 2413 + 3412 \right)$$

$$(\omega \wedge *\omega)_{1234} = (\omega_{12} \omega_{12} + \omega_{13} \omega_{13} + \omega_{14} \omega_{14} + \omega_{23} \omega_{23} + \omega_{24} \omega_{24} + \omega_{34} \omega_{34}) \sqrt{g} =$$

$$= \frac{1}{2} \omega_{\mu\nu} \omega^{\mu\nu} \sqrt{g}$$

$$\omega \wedge *\omega = (\omega \wedge \omega)_{1234} dx^1 \dots dx^4$$

- Consideriamo l'azione del fotone

$$S = -\frac{1}{4} \int_M d^d x \sqrt{g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$$

↑ $g_{\alpha\beta} = 1$ in sp. Minkowski

$$= -\frac{1}{4} \int d^d x \text{tr}(F \wedge F) = -\frac{1}{2} \int_M F \wedge *F \quad F = dA$$

Qto è il mod in cui si scrive termine cinetico del fotone con le forme differenziali!

$$- F \wedge F = F \wedge *F \quad *^2 = 1 \text{ on even forms}$$

$$= (F, *F) \text{dvol}_M$$

$$\leftarrow (*F)_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho}$$

$$= \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\sigma\rho} d^4x$$

$$\Rightarrow \frac{1}{32\pi^2} \int \epsilon_{\mu\nu\sigma\rho} F^{\mu\nu} F^{\sigma\rho} d^4x = \frac{1}{8\pi^2} \int F \wedge F$$

$$A = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} dx^{\mu\nu} \quad B = \frac{1}{2} b_{\mu\nu} dx^{\mu\nu}$$

$$(A \wedge B) = \frac{1}{4!} (A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_4} dx^{\mu_1 \dots \mu_4} = (A \wedge B)_{1234} dx^1 \dots dx^4$$

$$(A \wedge B)_{\mu_1 \dots \mu_4} = \frac{1}{2 \cdot 2} (a_{\mu_1 \mu_2} b_{\mu_3 \mu_4} \pm \text{permut.}) =$$

$$= \frac{1}{4} (a_{\mu_1 \mu_2} b_{\mu_3 \mu_4} - \underbrace{1324}_{\sim} + \underbrace{1423}_{\sim} + \underbrace{2314}_{\sim} - \underbrace{2413}_{\sim} + \underbrace{3412}_{\sim})$$

+ altre permutazioni

$$b = \star a : b_{\mu_3 \mu_4} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu_3 \mu_4}^{\alpha\beta} a_{\alpha\beta}$$

$$(A \wedge \star A)_{1234} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 (a^{12} a_{12} + a^{13} a_{13} + a^{14} a_{14} + a^{23} a_{23} + a^{24} a_{24} + a^{34} a_{34}) =$$

$$= \frac{1}{2} a_{\mu_1 \mu_2} a^{\mu_1 \mu_2}$$

$$A \wedge \star A = \frac{1}{2} a_{\mu\nu} a^{\mu\nu}$$