SIMMETRIE

(From Alvarez-Gaumé et al arXiv:2306.08037)

Vediamo tipi di SIMMETRIE che si incontrano in FISICA:

1) CINEMATICHE (SPACETIME) : agiscono sulle COORD. dello spazio-tempo E sugli indici di campo.
   ES: Lorentz, Poincaré, conformal transf..

2) DISCRETE . ES: P, C, T e composizioni.

3) SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI : dipendono da parametri continui (~ gruppi di Lie).

4) "SIMMETRIE" LOCALI (di gauge) : variano da pto a pto nello spazio-tempo. Non mappano uno stato fisico su un'altro ; sono piuttosto una RIDONDANZA DELLA DESCRIZIONE (per es. necessario per avere descrizione manifestam. Lorentz invariante e locale di particelle di spin 1 e 2).

SIMMETRIES IN QFT

In QM, le <u>simmetrie</u> sono mappe tra raggi vettori in $\mathcal{H}$, che 'preservano' le ampiezze di probabilità.

$$|\alpha\rangle \mapsto U|\alpha\rangle \equiv |\alpha'\rangle$$

$$|\beta\rangle \mapsto U|\beta\rangle \equiv |\beta'\rangle$$

Vogliamo U t.c.

$$|\langle\alpha'|\beta'\rangle|^2 = |\langle\alpha|U^\dagger U|\beta\rangle|^2 \overset{\downarrow}{=} |\langle\alpha|\beta\rangle|^2$$

Qto avviene se

$$\langle\alpha|U^\dagger U|\beta\rangle = \begin{cases} \langle\alpha|\beta\rangle & \leftarrow U \text{ UNITARIO} \\ \langle\alpha|\beta\rangle^* & \leftarrow U \text{ ANTI-UNITARIO} \end{cases}$$

(e anti-lin., $U a|\alpha\rangle = a^* U|\alpha\rangle$)

↓

Wigner's theorem: in QM le simmetrie sono implementate da op. (anti-)unitari.

Nota: le simmetrie continue (connesse all'unità) sono sempre implementate da op. unitari (l'identità è lineare, <u>non</u> anti-lin.).

Es. di sim. con op. anti-unit.: T, CPT

TEOREMA DI NÖTHER (I)

Iniziamo con una teoria classica con n campi ϕ_i $i=1,\dots,n$, e una Lagrangiana invariante sotto (forma infinitesima):

$$\phi_i \mapsto \phi_i + \delta_\epsilon \phi_i \quad (*) \quad \text{dip. linearm. da } N \text{ param. } \epsilon_A$$

- trasf. formano un GRUPPO;
- possono essere esponenziate dando trasf. continue connesse all'identità.

(*) lascia invariate le eq. del moto:

se $S = \int d^4x\, \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)$ allora $\delta_\epsilon S = \int d^4x\, \partial_\mu K^\mu$

dove $\partial_\mu K^\mu$ è LINEARE in ϵ.

D'altro canto possiamo scrivere

$$\delta_\epsilon S = \int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right] \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i \right) \right\}$$

Mettendo insieme queste due relazioni otteniamo

$$\int d^4x \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \right] \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu \right)}_{\equiv j^\mu(\epsilon)} \right\} = 0$$

valida $\forall \epsilon$ $\Rightarrow$

$$\partial_\mu j^\mu(\epsilon) = 0 \quad \text{quando } \phi_i \text{ soddisfano eq. del moto}$$

Siccome $j^\mu(\epsilon)$ dip. lin. da ϵ $\rightsquigarrow$ $j^\mu(\epsilon) = j^\mu_A \epsilon_A$

$\Rightarrow$ N correnti CONSERVATE j^μ_A

Teorema di Nöther (II)

Prendiamo ora una teoria inv. sotto trasf. locali, cioè ora $\epsilon_A(x)$ dip. da pto in spazio-tempo.

→ il teorema I rimane valido ⇝ ∃ corrente conservata.

Le trasf. sono ora

$$\delta_\epsilon \phi_i = R_{i,A}(\phi)\, \epsilon_A + R^\mu_{i,A}(\phi)\, \partial_\mu \epsilon_A \qquad \underbrace{+\, \partial^2 + \partial^3 + \dots}_{\text{non presenti in teorie usuali}}$$

(qto include $\delta_\epsilon A_\mu = \partial_\mu \epsilon$)

La generica variaz. dell'azione sarà come prima e possiamo arrivare alla relazione

$$\int d^4x \left[(e.o.m.)_i^{(\phi)} \delta_\epsilon \phi_i + \partial_\mu j^\mu(\epsilon) \right] = 0 \qquad \forall \epsilon(x)$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i} \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu$$

lin. in $\epsilon(x)$

Qndo $\epsilon(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0 \Rightarrow \int d^4x\, \partial_\mu j^\mu(\epsilon) = 0$

SMALL GAUGE TRANSFORM.

In qto caso otteniamo allora solo la condizione

$$\int d^4x \left\{ (e.o.m.)_i(\phi)\, R_{i,A}(\phi) - \partial_\mu \left[(e.o.m.)_i(\phi)\, R^\mu_{i,A}(\phi) \right] \right\} \epsilon_A(x) \qquad (o)$$

$\forall\, \epsilon_A(x)$ con $\epsilon_A(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

→ Qte sono IDENTITA' differenziali che le EQ. DEL MOTO devono soddisfare ⇒ alcune sono RIDONDANTI.

Inoltre qt'identità vale anche OFFSHELL (vincoli su cond. import. per quantum corr.)

Esistono correnti conservate?

- Usando le identità (o), si mostra che

$$\partial_\mu \left[\epsilon_A(x)\, R^\mu_{i\,A}(\phi)\, (\text{e.o.m.})_i(\phi) \right] = (\text{e.o.m.})_i(\phi)\, \delta_\epsilon \phi_i$$

$\Longrightarrow$ $S^\mu(\epsilon) = \epsilon_A(x)\, R^\mu_{i\,A}\, (\text{e.o.m.})_i(\phi)$ è conservata (on-shell)

Il problema è che $S^\mu(\epsilon)$ è NULLA on-shell.

- Uno può guardare a $j^\mu(\epsilon)$ ottenuta tramite teorema I

cioè
$$j^\mu(\epsilon) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi_i}\, \delta_\epsilon \phi_i - K^\mu$$

e si accorge che essa si conserva.

$j^\mu(\epsilon)$ produce una carica NON-TRIVIALE?

- Guardando le espressioni precedenti, uno si accorge che

$$\partial_\mu \left(j^\mu(\epsilon) - S^\mu(\epsilon) \right) = 0 \quad \text{anche off-shell}$$

(per entrambe $\partial_\mu j^\mu = \partial_\mu S^\mu = (\text{eom})_i(\phi)\, \delta_\epsilon \phi_i$)

cioè è identicam. zero

$\Rightarrow$ possiamo scrivere $j^\mu = S^\mu + \partial_\nu \underbrace{k^{\mu\nu}}_{\text{ANTISIMM.}} \underset{\text{ON-SHELL}}{=} \partial_\nu k^{\mu\nu}$

$\rightarrow$ La carica conservata è data da

$$Q(\epsilon) = \int_{\Sigma} d^3\bar{x}\, j^0(\epsilon) = \int_{\Sigma} d^3x\, \partial_i K^{0i} = \int_{\partial\Sigma} dS_i\, K^{0i}$$

$\Sigma \leftarrow$ spazio $\mathbb{R}^3$

(Rivedremo meglio a fine corso qndo parleremo di generalized sym.)

è determinata dall'integrale sul bordo dello spazio.

Poiché $K^{\mu\nu}$ è lineare in $\epsilon_A(x)$, concludiamo che la CARICA È TRIVIALE per SMALL GAUGE TRANSF.

↳ quelle legate alla ridondanza

Qto non avviene trasf. t.c. $\epsilon_A(x) \underset{x\to\infty}{\not\to} 0$, che vengono dette LARGE GAUGE TRANSFORMATIONS. Per qte trasf. esiste una carica conservata.

$\Rightarrow$ Per teorie con invarianza sotto trasf. LOCALI, c'è una corrente di Nöther conservata, legata alle trasf. che non tendono all' $\mathbb{1}$ all' ∞.

Tra qte trasf. che non tendono a zero all'∞ ci sono anche qte che tendono a una trasf. cost. all'∞, cioè $U(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} U_\infty \in G$ cost.

Sottogruppo di qli che producono correnti conservate

Possiamo quindi definire

$$\Omega_* = \{ U(x) \mid U(x) \to \mathbb{1} \quad a \quad |x| \to \infty \}$$

SMALL GAUGE TRANSF.

$$\Omega = \{ U(x) \mid U(x) \to \text{cost.} \in G \quad a \quad |x| \to \infty \}$$

a volte queste vengono dette large gauge transf.

$$\Omega / \Omega_* \cong G$$

← GRUPPO DI SIMMETRIA della teoria

Ω_* invece sono RIDONDANZE nella descrizione

CARICA CONSERVATA in QFT

Ricordiamo l'espressione della carica conservata

$$Q(\epsilon) = \int d^3\bar{x}\; j^0_\epsilon(\bar{x}, t) = \int d^3\bar{x} \left(\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_i}}_{\text{momento coniugato a } \phi_i \,\equiv\, \pi_i(x)} \delta_\epsilon \phi_i - K^0 \right)$$

In canonical quantization

$$[\pi_i(\bar{x}), \phi_j(\bar{y})] = -i\, \delta_{ij}\, \delta^{(3)}(\bar{x} - \bar{y})$$

Prendiamo $k_\mu = 0$, allora

dip. solo da ϕ

$$[i Q(\epsilon), \phi_j(x)] = i \int d^3\bar{y}\, [\pi_i(y)\, \delta_\epsilon \phi_i(y), \phi_j(x)] =$$

$$= i \int d^3\bar{y}\, [\pi_i(y), \phi_j(x)]\, \delta_\epsilon \phi_i(y) =$$

$$= \delta_\epsilon \phi_j(x)$$

$\Rightarrow Q(\epsilon)$ è il generatore delle trasf. infinitesime.