APPLICAZIONI LINEARI

Cominciamo con questa osservazione.
Sia $A \in \mathcal{M}^{n \times m}$ una matrice.

$\forall \; x = (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m$ consideriamo il "vettore colonna"

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

Possiamo allora calcolare

$$AX = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}^{n \times m}} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{\begin{pmatrix} \sum_j a_{1j} x_j \\ \vdots \\ \sum_j a_{nj} x_j \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^n}$$

Nasce così una funzione

$$L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$X \longmapsto AX$$

È facile verificare che:

a) $L(X + X') = L(X) + L(X')$

b) $L(\lambda X) = \lambda L X$

a) + b): in breve si dice che L è una applicazione (o funzione) lineare.

OSSERVAZIONE

Se $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^m$

$\uparrow$ i-esima posizione

$i = 1, \dots, m$, sono la base canonica di $\mathbb{R}^m$ e se

$$\tilde{e}_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

$\uparrow$ j-esima posizione

sono la base canonica di $\mathbb{R}^n$ $(j = 1, \dots, n)$

allora $L(e_i) = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{pmatrix} = a_{1i} \tilde{e}_1 + \dots + a_{ni} \tilde{e}_n$

ovvero $(L(e_i))_j = a_{ji}$

la i-esima colonna di A è l'immagine di e_i e l'entrata di posizione ji è la j-esima componente dell'immagine di e_i.

Definizione generale

Se U e V sono due spazi vettoriali, una funzione $L : U \longrightarrow V$ si dice applicazione lineare $\Longleftrightarrow$ $\begin{cases} L(u+u') = L(u) + L(u') \\ L(\lambda u) = \lambda L(u) \end{cases}$

$\forall \lambda \in \mathbb{R},\ u, u' \in U$

OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che se $A \in M^{n \times m}$ resta definita un'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

$$L : X \in \mathbb{R}^m \longmapsto AX \in \mathbb{R}^n$$

dove $X \in \mathbb{R}^m$ è scritto come "vettore colonna".

Ci chiediamo se ogni applicazione $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ si possa scrivere come moltiplicazione di matrici. La risposta è affermativa.

Infatti posto $L(\underbrace{e_j}_{\text{base canonica di } \mathbb{R}^m}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{\tilde{e}_i}_{\text{base canonica di } \mathbb{R}^n}$

se ho $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} x_j e_j$,

si ha che

$$L(X) = L\left(\sum_{j=1}^{m} x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^{m} x_j L(e_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} x_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \tilde{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j \right) \tilde{e}_i$$

da cui segue che

$$L(X) = AX \quad \text{dove} \quad A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$$

e $\quad a_{ij} = (L(e_j))_i$

Quindi c'è una perfetta corrispondenza tra matrici e applicazioni lineari.

Definizioni

Sia $L : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ applicazione lineare.

Si definisce

$$\ker(L) : \{ X \in \mathbb{R}^m \mid LX = 0 \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$\mathcal{R}(L) = \{ LX \mid X \in \mathbb{R}^m \} \subseteq \mathbb{R}^n \}.$$

(= immagine di L)

È facile verificare che $\ker(L)$ e $\mathcal{R}(L)$ sono sottospazi vettoriali rispettivamente di $\mathbb{R}^m$ (dominio) e di $\mathbb{R}^n$ (codominio)

PROPOSIZIONE

L è iniettiva $\iff \ker(L) = \{0\}$.

Dim.

Sia L iniettiva. Se $x \in \ker(L)$ allora

$Lx = 0 = L0$. Poiché L è iniettiva, allora $x = 0$. Quindi $\ker(L) = \{0\}$.

Viceversa, sia $\ker(L) = \{0\}$. Siano $x, x' \in \mathbb{R}^m$. Se $Lx = Lx'$ allora $L(x - x') = 0$, cioè $x - x' \in \ker(L)$, quindi $x - x' = 0$, cioè $x = x'$. Quindi L è iniettiva. $\square$

Conseguenza:

PROPOSIZIONE

L è iniettiva $\Longleftrightarrow$ $Le_1, \dots, Le_m$ sono linearmente indipendenti.

Dim.

Sia L iniettiva ($\Leftrightarrow \ker(L) = \{0\}$).

Sia $\sum_{i=1}^{m} \mu_i L(e_i) = 0$. allora

$L(\sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i) = 0$. Quindi $\sum_{i=1}^{m} \mu_i e_i = 0$

e quindi $\mu_i = 0 \ \forall i$.

Viceversa, supponiamo che $Le_1, \dots, Le_m$ siano indipendenti, e supponiamo che

$LX=0$, dove $X=\sum_{i=1}^{m} x_i e_i$.

Allora $0=L(\sum_{i=1}^{m} x_i e_i)=\sum_{i=1}^{m} x_i L(e_i)$, da cui $x_i=0$ $\forall i$, e quindi $X=0$.

Quindi $Ker(L)=0$, e quindi L è iniettiva $\boxtimes$

OSSERVAZIONE:

Se $L: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $n<m$, L non può essere iniettiva.

OSSERVAZIONE

$R(L) = span < Le_1, \ldots, Le_m >$

CONSEGUENZA: se $n>m$ L non può essere suriettiva.

CONSEGUENZA: L può essere una funzione invertibile solo se $n=m$. Ma non tutte le applicazioni lineari da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n$ sono invertibili.

si ha che L è invertibile $\Longleftrightarrow$ la matrice A che rappresenta L è invertibile, e L^{-1} è rappresentata da A^{-1}.

OSSERVAZIONE IMPORTANTE!

La composizione di applicazioni lineari corrisponde alla moltiplicazione di matrici righe per colonne!

Infatti se ho

$$\mathbb{R}^m \xrightarrow{L} \mathbb{R}^n \xrightarrow{R} \mathbb{R}^q$$

base e_i — base $\tilde{e}_j$ — base $\tilde{\tilde{e}}_k$

$$(L(e_i))_j = a_{ji}$$

$$(R(\tilde{e}_j))_k = b_{kj}$$

$$R(L(e_i)) = R\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\tilde{e}_j\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,R(\tilde{e}_j) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \sum_{k=1}^{q} b_{kj}\,\tilde{\tilde{e}}_k = \sum_{k=1}^{q}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj}\,a_{ji}\right)}_{=c_{ki}}\tilde{\tilde{e}}_k$$

quindi

$$\left((R \circ L)(e_i) \right)_k = c_{ki} = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \, a_{ji} \, . \qquad \square$$

TEOREMA

Sia $L : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$

Allora $\dim(\ker(L)) + \dim(R(L)) = m$

Dim. (idea)

Sia $\dim(\ker(L)) = k$.

Allora prendo $V := \ker(L)^{\perp} \subseteq \mathbb{R}^n$.

Abbiamo visto che $\dim V = m - k$

Se $v^{(1)}, \dots, v^{(m-k)}$ è una base di V,

allora $Lv^{(1)}, \dots, Lv^{(m-k)}$ sono linearmente indipendenti e generano $R(L)$. $\square$

OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che un sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

Si può scrivere in forma matriciale

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}}_{=A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}}_{=X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{=B}$$

Risolvere il sistema equivale quindi a risolvere

$$\underbrace{A}_{\in M^{n \times m}} \underbrace{X}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{B}_{\in \mathbb{R}^n}$$

$\in M^{n\times m}$, applicazione lineare $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$.

Quindi se le colonne di A generano tutto $\mathbb{R}^n$, allora il sistema è risolvibile $\forall\ B = (b_1, \dots, b_n)$. Altrimenti è risolvibile solo se $B \in \text{Span}\langle A_1, \dots, A_m \rangle$ dove $A_1, \dots, A_m$ sono le colonne di A.

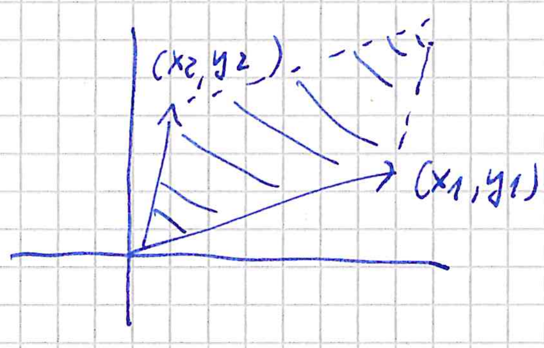
Inoltre se le colonne di A sono linearmente indipendenti, allora $\forall B \in \mathbb{R}^n$ esiste al più una soluzione.

DETERMINANTI

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo definito il determinante di due vettori.

$$\det\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

che produce come risultato l'area con segno del parallelogramma generato da (x_1, y_1) e (x_2, y_2)



È geometricamente evidente che (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono linearmente indipendenti $\Longleftrightarrow \det((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \neq 0$.

Consideriamo ora una matrice 2×2.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

Abbiamo visto che $\mathcal{R}(A) = \text{span}\left\langle \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right\rangle$

Segue che A è invertibile (cioè iniettiva + suriettiva) $\iff$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) \neq 0 .$$

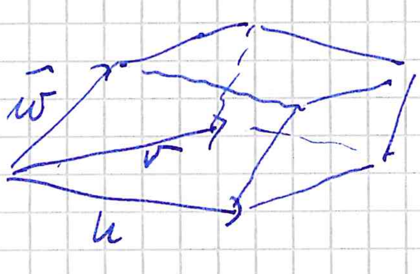
Si definisce

$$\det A := \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

In $\mathbb{R}^3$ abbiamo definito il determinante di tre vettori,

$$\det(u, v, w) := (u \wedge v) \cdot w = u \cdot (v \wedge w)$$

che dà come output il volume con segno del parallelepipedo generato da u, v, w.



(58)

È geometricamente evidente che u, v, w sono linearmente indipendenti $\Leftrightarrow$ $\det(u,v,w) \neq 0$.

Data una matrice 3×3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

essa è quindi invertibile $\Leftrightarrow$

$$\det\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right) \neq 0$$

Definiamo quindi

$$\det A := \det\left(\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right]$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32})$$
$$+ a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22})$$

A invertibile $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Vediamo ora come si può definire un determinante in $\mathbb{R}^n$.

Data una coppia ij, definiamo la <u>matrice</u> A_{ij} ottenuta da A eliminando la i-esima riga e la j-esima colonna.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La formula del det in $M^{3\times 3}$ diventa

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{i1} (-1)^{i+1} \det A_{i1}$$

[è facile verificare che posso anche fissare un'altra colonna, e allora

$$\det A = \sum_{i=1}^{3} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij}]$$.

Questo ci suggerisce di definire

per una matrice $A \in M^{n \times n}$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{i1} (-1)^{i+1} \det \underbrace{A_{i1}}_{(n-1)\times(n-1)} . \left(\overset{\forall j}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} \det A_{ij} \right)$$

Avendo già definito i determinanti 2×2 e 3×3, la formula permette di definire quelli 4×4. E così via in modo induttivo.

Si può verificare che anche in $M^{n \times n}$ A è invertibile $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Inoltre $\det A$ è il "volume con segno" del "parallelepipedo" di $\mathbb{R}^n$ generato da $Ae_1, Ae_2, \dots, Ae_n$.

→ PROPRIETÀ IMPORTANTE

$\det(AB) = \det A \det B$

geometricamente significa che il fattore di scala dei volumi per la trasformazione AB è dato dal prodotto dei fattori di scala per le trasformazioni A e B.

MATRICE INVERSA

Data $A = (a_{ij})_{ij}$ abbiamo visto che A è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

Domanda: come si calcola l'inversa?

Partiamo da questa osservazione.

Abbiamo visto che $\forall j$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{=: \alpha_{ij} \text{ (detto "cofattore")}}$$

se costruiamo una matrice B in questo modo:

$$b_{ji} := \alpha_{ij}$$

si ha che $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ij} = \det A \quad \forall j$

D'altra parte, se $k \neq j$,

$$\sum_{i=1}^{n} b_{ji} a_{ik} = \det \tilde{A} = 0$$

dove $\tilde{A}$ si ottiene da A sostituendo la j-esima colonna con la k-esima.

$\det \tilde{A} = 0$ perché in $\tilde{A}$ due colonne sono uguali.

Segue che

$$BA = \begin{pmatrix} \det A & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \det A \end{pmatrix}$$

quindi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} B$

$$\left[= \frac{1}{\det A} (\mathrm{cof} A)^T \right]$$

[Trasposta* della matrice dei cofattori]

*

$(c_{ij})^T_{ij} := (c_{ji})_{ij}$
Trasposta

Esempio

Trovare A^{-1} dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1 passo : calcolare $\det A = 1\cdot(1-1)+(-1)(0-1)$
$+ 0\cdot(0-1)$
$= +1 \neq 0.$

2 passo
Calcolo $\operatorname{cof} A$

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3 passo
Calcolo $(\operatorname{cof} A)^T$

$$(\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4 passo
poiché $\det A = 1$, si ha

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Verifica : >>>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$