Geometria 3 – Topologia

Foglio di esercizi 3

Giustificare adeguatamente le risposte.

1) Dimostrare le seguenti.

   (a) $B^n \cong [-1,1]^n \subset R^n$.

   (b) $\operatorname{Int} B^n := \operatorname{Int}_{R^n} B^n = \{x \in R^n \mid \|x\| < 1\}$.

   (c) $\operatorname{Int} B^n \cong R^n$.

   (d) $\partial B^n := \operatorname{Fr}_{R^n} B^n = S^{n-1}$.

2) X T_1 e $\# X < \infty \Rightarrow X$ discreto.

3) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'applicazione $f\colon X \to Y$ è detta *Lipschitziana* se $\exists\, K \geq 0$ t.c. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. Sia $f\colon X \to Y$ Lipschitziana. Dimostrare che f è continua.

4) Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) spazi metrici. Un'*isometria* è un'applicazione suriettiva $f\colon X \to Y$ t.c. $d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2)$ $\forall x_1, x_2 \in X$. Data $f\colon X \to Y$ isometria (X e Y sono *isometrici*), dimostrare che:

   (a) f biettiva;

   (b) f^{-1} isometria;

   (c) f omeo.

5) Dimostrare che C^n e R^{2n} sono isometrici rispetto alla distanza Euclidea, quindi omeomorfi.

6) Sia V spazio vettoriale normato e $w \in V$. Definiamo la traslazione

$$t_w\colon V \to V, \quad t_w(v) = v + w.$$

   Dimostrare che t_w è isometria e dunque omeo.

7) Siano $X = X_1 \cup X_2$ e Y spazi topologici, con $X_1, X_2 \subset X$ chiusi, e siano $f_i\colon X_i \to Y$, $i = 1,2$, continue t.c. $f_1(x) = f_2(x)$ $\forall\, x \in X_1 \cap X_2$. Definiamo $f\colon X \to Y$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{se } x \in X_1 \\ f_2(x) & \text{se } x \in X_2 \end{cases}.$$

   Dimostrare che f è ben definita e continua (si chiama *Lemma d'incollamento*). Cosa succede senza l'ipotesi X_1, X_2 chiusi? Se sono entrambi aperti?

8) Consideriamo lo spazio delle matrici $M_{m,n}(R)$ con la norma

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^t A A)}, \ \forall\, A \in M_{m,n}(R),$$

dove $\mathrm{tr}(B)$ è la traccia di $B \in M_n(R)$ (somma delle entrate della diagonale principale). Mostrare che

(a) $M_{m,n}(R)$ è isometrico, dunque omeomorfo, a R^{mn};

(b) $\mathrm{GL}_n(R)$ è aperto in $M_n(R)$;

(c) $\mathrm{SL}_n(R)$ è chiuso;

(d) $\mathrm{O}(n)$ e $\mathrm{SO}(n)$ sono chiusi.

9) Consideriamo lo spazio delle matrici $M_{m,n}(C)$ con la norma

$$\|A\| = \sqrt{\mathrm{tr}({}^t \bar{A} A)}, \ \forall\, A \in M_{m,n}(C).$$

Mostrare che

(a) $M_{m,n}(C)$ è isometrico, dunque omeomorfo, a C^{mn};

(b) $\mathrm{GL}_n(C)$ è aperto in $M_n(C)$;

(c) $\mathrm{SL}_n(C)$ è chiuso;

(d) $\mathrm{U}(n)$ e $\mathrm{SU}(n)$ sono chiusi.