Tutorato Analisi 1 M-Z
Esercitazione 1 - 16/10/2023

Clemente Romano

16 ottobre 2023

1. Siano $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^N$, dimostrare la "reverse triangle inequality"[1]
$$|\, \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \,| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$$
dimostrare anche la disuguaglianza seguente (molto simile)
$$|\, \|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \,| \leq \|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\|$$

2. Dimostrare che se $\boldsymbol{x_1}, \boldsymbol{x_2}, \boldsymbol{x_3}, \dots, \boldsymbol{x_m} \in \mathbb{R}^N$, allora[2]
$$\|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \leq \|\boldsymbol{x_1}\| + \|\boldsymbol{x_2}\| + \|\boldsymbol{x_3}\| + \cdots + \|\boldsymbol{x_m}\|$$
$$\|\boldsymbol{x_1} + \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}\| \geq \|\boldsymbol{x_1}\| - \|\boldsymbol{x_2}\| - \|\boldsymbol{x_3}\| - \cdots - \|\boldsymbol{x_m}\|$$
Se ne deduca che se $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, allora
$$|p(x)| \geq |a_n||x|^n - |a_{n-1}||x|^{n-1} - \cdots - |a_1||x| - |a_0|$$

3. Dimostrare la continuità delle seguenti funzioni utilizzando la definizione ϵ-δ :
   (a) $f(x) = x^2$
   (b) $f(x) = x^3$
   (c) $f(x) = |x + 2|$
   (d) $f(x) = 49$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione che soddisfa la seguente proprietà:
$$\exists L > 0 \;:\; |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$
dimostrare che f è continua.

5. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, dimostrare che se $U \subset \mathbb{R}$ è un insieme aperto allora $f^{-1}(U)$ è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{R}^2$. Si ricorda che $f^{-1}(U)$ è definito nel modo seguente
$$f^{-1}(U) := \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(\boldsymbol{x}) \in U\}$$

6. Determinate l'interno, la chiusura e la frontiera dei seguenti insiemi:
   (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; |y| \geq x\}$
   (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x > 0 \text{ e } y < 1\}$
   (c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2 < x < 5 \text{ e } y \leq 3\}$
   (d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; -3 \leq x \leq 3 \text{ e } -2 \leq y \leq 2\}$
   (e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 < 9\}$
   (f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2 + y^2 \leq 1\}$

7. Sia $A \subset \mathbb{R}$ un insieme limitato inferiormente, sia $\alpha := \inf(A)$ e sia $\alpha \in A$, dimostrate che A non può essere aperto.[3]

8. Determinare quale degli insiemi seguenti è aperto, quale è chiuso e quale non è né aperto né chiuso
   (a) $[-\sqrt{77\pi}, 65536[$
   (b) $\bigcup_{n=1}^{\infty}]99n, 99n + 1[$

[1] hint : si cominci dimostrando che $\|\boldsymbol{x}\| - \|\boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|$
[2] hint : si ponga $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x_1}$ e $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x_2} + \boldsymbol{x_3} + \cdots + \boldsymbol{x_m}$ e si usi la reverse triangle inequality
[3] hint : si dimostri che α non appartiene all'interno di A

Email: clemente.romano@sissa.it

(c) $\bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}]$

(d) $]\frac{1}{243}, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ : \ x > \frac{1}{243}\}$

I prossimi sono esercizi bonus, quindi potrebbero risultare particolarmente difficili

9. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $\delta > 0$ e sia $A \subset E$, si definisce

$$I_\delta(A) := \bigcup_{x \in A} B(x, \delta)$$

Si dimostri che $A \subset I_\delta(A)$ e che $I_\delta(A)$ è un insieme aperto [4]

10. Siano $A, B \subset \mathbb{R}$ due insiemi tali che:

$$\forall a \in A \ \exists b \in B \ : \ a \leq b \quad , \quad \forall b \in B \ \exists a \in A \ : \ a \leq b$$

Dimostrare che

$$\inf(A) \leq \inf(B) \quad , \quad \sup(A) \leq \sup(B)$$

11. Sia (E, d) uno spazio metrico, sia $A \subset E$, sia $x \in E$, si definisce

$$d(x, A) := \inf\{d(x, a) \ : \ a \in A\}$$

Dimostrare che[5]

$$d(x, A) \leq d(x, y) + d(y, A) \qquad \forall x, y \in E$$

da ciò si deduca che

$$|d(x, A) - d(y, A)| \leq d(x, y) \qquad \forall x, y \in E$$

e si deduca che $f(x) = d(x, A)$ è una funzione continua.

[4]hint : è vero che $x \in B(x, \delta)$? L'unione di insiemi aperti è un insieme aperto?

[5]hint : la disuguaglianza triangolare implica che $d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a)$, a questo punto si usi il risultato dell'esercizio 10

Email: clemente.romano@sissa.it