

# Legge di una Variabile Aleatoria

# Funzione di Ripartizione

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità,  $X$  variabile aleatoria; la **misura immagine/legge/distribuzione** di  $X$  è

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(X \in B), \quad B \in \mathcal{B}$$

- ▶  $P_X$  è un probabilità su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$
- La **funzione di ripartizione** di  $X$ ,  $F_X$ , è la restrizione di  $P_X$  agli intervalli  $B = (-\infty, x]$

$$F_X(x) = P_X((-\infty, x]) = P(X \in (-\infty, x]) = P(X \leq x) \quad x \in \mathbb{R}$$

quindi  $F_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

- ▶ notazione: variabile/i aleatoria/e  $\equiv$  **va**  
funzione di ripartizione  $\equiv$  **cdf**

# Funzione di Ripartizione

- Proprietà della funzione di ripartizione
  - ⓪  $F_X$  non decrescente
  - ⓪  $F_X$  continua a destra
  - ⓪  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$
  - ⓪ se  $x < y, P(x < X \leq y) = F_X(y) - F_X(x), P(X > x) = 1 - F_X(x)$
  - ⓪  $P(X < x) = \lim_{y \uparrow x} F_X(y) \equiv F_X(x-)$
  - ⓪  $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-)$  possibile “salto” di  $F_X$  in  $x$

# Funzione di Ripartizione

- Teorema: per ogni funzione  $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  che soddisfa (i), (ii), (iii) (nota come **funzione di ripartizione**)
  - ▶ **esiste un'unica** probabilità  $P$  su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$  tale che

$$P((-\infty, x]) = F(x)$$

- ▶ esiste una variabile aleatoria  $X$  su uno spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  tale che  $F_X = F$
- Prob. su intervalli  $\Rightarrow$  estende **unicamente** ai Boreliani
- Si può specificare una cdf senza indicare lo spazio di probabilità

# Funzione di Ripartizione

- Due variabili aleatorie  $X, Y$  tali che  $F_X = F_Y$ , cioè  $P_X = P_Y$ , hanno la stessa legge, scritto

$$X \sim Y$$

- ▶ da un punto di vista probabilistico,  $X$  e  $Y$  sono uguali
- ▶ se  $X = Y$  q.c. allora  $X \sim Y$  ma non viceversa!
- ▶ Esempio.  $X = 1_A$  con  $P(A) = 1/2$ ,  $Y = 1 - 1_A$

# Funzione di Ripartizione

- $X$  va con cdf  $F_X$

$$\begin{aligned} S &= \{x \in \mathbb{R} \mid F_X \text{ discontinua in } x\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\} \end{aligned}$$

- ▶  $S$  è discreto
- ▶ Lemma:  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  spazio di probabilità,  $(A_\alpha)_{\alpha \in I}$  a due a due disgiunti con  $A_\alpha \in \mathcal{F}$  e  $P(A_\alpha) > 0$  per ogni  $\alpha \Rightarrow I$  è discreto

# Funzione di Ripartizione

- $X$  va con cdf  $F_X$ ,  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\}$

▶  $x \in S$ :

$$P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) = p > 0$$

↪ massa di probabilità pari a  $p$  in  $x$

- Sia  $\lambda = \sum_{x \in S} P(X = x) \in [0, 1]$

▶  $\lambda = 1$ :  $X$  **discreta**

▶  $\lambda = 0$ :  $X$  **continua**

▶  $0 < \lambda < 1$ :  $X$  **mista**

# Legge di una Variabile Aleatoria Discreta

- Va  $X$  **discreta**: insieme dei valori  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  **finito o numerabile**
  - ▶  $F_X$  costante tra due determinazioni successive
  - ▶ massa di probabilità pari a  $P(X = x_i) = p_i$  in  $x_i$
  - ▶ spesso si assegnano direttamente i valori  $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$  e le masse  $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$  con

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_i = 1$$

- ▶ allora è una cdf

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i$$

inoltre per ogni Boreliano  $B$ ,  $P(X \in B) = \sum_{i: x_i \in B} p_i$

# Legge di una Variabile Aleatoria Discreta

- Esempio.

- ▶  $X = c$  q.c. **degenere**,  $P_X \equiv \delta_c$
- ▶  $X = 1_A$ ,  $P(A) = p$ ;  $X \sim$  **Bernoulli**( $p$ )
- ▶  $X \sim$  **Binomiale**( $n, p$ ) con  $n \geq 1$ ,  $0 < p < 1$

$$P(X = i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}, i = 0, \dots, n$$

$X$  = numero di successi in  $n$  prove indipendenti ed equiprobabili

- ▶  $X \sim$  **Poisson**( $\lambda$ ) con  $\lambda > 0$

$$P(X = i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!}, i = 0, 1, 2, \dots$$

# Legge di una Variabile Aleatoria Discreta

- Esercizio. Siano  $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$  eventi (prove) indipendenti ed equiprobabili con  $P(E_n) = p$  per ogni  $n$ 
  - ▶ trovare la distribuzione del numero di insuccessi  $X$  prima di vedere il primo successo (distribuzione **geometrica**)
  - ▶ trovare la cdf di  $X$  (usare  $\lfloor x \rfloor =$  massimo intero  $\leq x$ )
  - ▶ trovare la distribuzione di  $Y_k$ , numero di insuccessi prima di vedere il  $k$ -esimo successo, con  $k \geq 1$  (distribuzione **binomiale negativa**)

# Legge di una Variabile Aleatoria Continua

- Va  $X$  **continua**: la cdf  $F_X$  è continua
  - ▶ quindi  $P(X = x) = 0$  per ogni  $x \in \mathbb{R}$
  - ▶ caso particolare:  $X$  **dotata di densità**  $f_X$  se  $F_X$  è **assolutamente continua**, cioè esiste  $f_X : \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty)$ , integrabile, tale che

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

- ▶ notazione: funzione densità di probabilità  $\equiv$  **pdf**

# Densità di Probabilità

- Va  $X$  **assolutamente continua**

- ▶ spesso si assegna direttamente la pdf  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile con

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(u) du = 1$$

- ▶ allora

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(u) du, \quad x \in \mathbb{R}$$

è una cdf (assolutamente) continua

- ▶ inoltre per ogni Boreliano  $B$ ,  $P(X \in B) = \int_B f_X(u) du$

# Densità di Probabilità

- Proprietà della densità:  $X$  va con pdf  $f_X$  e cdf  $F_X$ 
  - ▶ [Densità da funzione di ripartizione (I)] se  $f_X$  continua in  $x \in \mathbb{R}$

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x)$$

e quindi

$$\begin{aligned}P(x < X \leq x + \Delta) &= F_X(x + \Delta) - F_X(x) \\ &= f_X(x)\Delta + o(\Delta) \\ &\approx f_X(x)\Delta\end{aligned}$$

(“o piccolo”: ogni funzione tale che  $o(z)/z \rightarrow 0$  se  $z \rightarrow 0$ )

- ▶ [Densità da funzione di ripartizione (II)]

$$f_X(x) = \frac{dF_X}{dx}(x) \text{ q.o.}$$

# Densità di Probabilità

- Proprietà della densità:  $X$  va con pdf  $f_X$  e cdf  $F_X$ 
  - ▶ [Unicità]  $f_X$  è **unica q.o.**, cioè  $g$  è un'altra pdf per  $X$  se e solo se  $f_X = g$  q.o.
  - ▶ in particolare, si può alterare arbitrariamente  $f_X$  su un insieme discreto ottenendo una nuova pdf per  $X$

# Densità di Probabilità

- Proprietà della densità:  $X$  va continua con cdf  $F_X$ 
  - ▶ [Derivata e densità] se  $F_X$  è derivabile con continuità tranne che su un insieme discreto

$$\dots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < \dots,$$

cioè

$$\frac{dF_X}{dx}(x) = f'_X(x)$$

esiste ed è continua tranne che per  $x = \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots$ , allora  $f'_X$  è una pdf per  $X$  (definire arbitrariamente  $f'_X$  sugli  $x_j$ )

# Densità di Probabilità

- Esempio.

- ▶  $X$  **uniforme** su  $(a, b)$  (con  $a < b$ );  $X \sim U(a, b)$

$$f_X(x) = \frac{1}{b-a} \text{ se } a < x < b; \quad 0 \text{ altrimenti}$$

- ▶ **distribuzione gamma**,  $X \sim \text{Gamma}(\alpha, \lambda)$  (con  $\alpha > 0, \lambda > 0$ )

$$f_X(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \text{ se } x > 0; \quad 0 \text{ altrimenti}$$

$\Gamma(\cdot)$  è la **funzione gamma**:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx, \quad \alpha > 0$$

(alcune proprietà:  $\Gamma(1) = 1$ ,  $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ )

- ▶  $X$  **esponenziale**,  $X \sim \text{Exp}(\lambda) \equiv \text{Gamma}(1, \lambda)$

# Densità di Probabilità

- Esempio.

- ▶  $X$  normale di parametri  $\mu, \sigma^2$ ;  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$

$$\phi_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x - \mu)^2\right)$$

- Esercizio.  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$

- ▶ trovare la cdf di  $X$
- ▶ trovare la distribuzione di  $Y = 1 - e^{-\lambda X}$
- ▶ trovare la distribuzione di  $Z = X^{1/\gamma}$  con  $\gamma > 0$

# Densità di Probabilità

- Esercizio.
  - ▶  $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ; trovare la pdf di  $Y = e^X$  (distribuzione **lognormale**( $\mu, \sigma^2$ ))
  - ▶ trovare una formula per la densità di  $Y = g(X)$  se  $X$  ha densità  $f_X$  e  $g$  è strettamente crescente o decrescente

# Legge di una Variabile Aleatoria

- **Mistura** di funzioni di ripartizione

- ▶ se  $F_1, F_2$  sono cdf, allora tale è

$$G = \lambda F_1 + (1 - \lambda) F_2$$

per ogni  $0 \leq \lambda \leq 1$  (mistura di  $F_1, F_2$  con pesi  $\lambda, 1 - \lambda$ )

- ▶ se  $X_1, X_2$  sono va con cdf  $F_1, F_2$ , allora  $G$  è la cdf della “lotteria”  $Y$  in cui si riceve  $X_1$  con prob.  $\lambda$  e  $X_2$  con prob.  $1 - \lambda$

# Legge di una Variabile Aleatoria

- **Mistura** di funzioni di ripartizione
  - ▶ costruzione: sullo spazio di probabilità  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  su cui  $X_1, X_2$  sono definite, sia  $A \in \mathcal{F}$ ,  $P(A) = \lambda$ ,  $A$  indipendente da  $X_1, X_2$  e

$$Y = 1_A \cdot X_1 + 1_{\bar{A}} \cdot X_2 = \begin{cases} X_1 & \text{se } A \text{ è V} \\ X_2 & \text{se } A \text{ è F} \end{cases}$$

- ▶ se entrambe  $F_1, F_2$  sono discrete (continue)  $\Rightarrow G$  è discreta (continua); cosa succede se  $F_1$  è discreta e  $F_2$  continua?
- Si estende al caso di  $n$  cdf (o un numerabile/continuo)

# Variabile Aleatorie Miste

- Variabile aleatoria  $X$  di tipo misto: nè discreta nè continua

▶ sia  $S = \{x \in \mathbb{R} \mid P(X = x) > 0\}$ , con  $0 < \sum_{x \in S} P(X = x) = \lambda < 1$

▶ parte discreta di  $F_X$ :

$$F_d(x) = \sum_{y \in S, y \leq x} P(X = y) = \sum_{y \in S, y \leq x} (F_X(y) - F_X(y-))$$

$\Rightarrow \tilde{F}_d = \frac{1}{\lambda} F_d$  è una cdf discreta

▶ parte continua:

$$F_c(x) = F_X(x) - F_d(x)$$

$\Rightarrow \tilde{F}_c = \frac{1}{1-\lambda} F_c$  è una cdf continua

# Variabile Aleatorie Miste

- Variabile aleatoria  $X$  di tipo misto: nè discreta nè continua
  - ▶ quindi

$$F_X = F_d + F_c = \lambda \tilde{F}_d + (1 - \lambda) \tilde{F}_c$$

- ▶ spesso si assegnano direttamente i valori  $x_1, \dots, x_n, \dots$  e le masse  $p_1, \dots, p_n \dots$  con

$$p_i \geq 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_i = \lambda < 1$$

e la “densità”  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  integrabile tale che

$$f(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 - \lambda < 1$$

e si definisce direttamente la cdf

$$F_X(x) = \sum_{i: x_i \leq x} p_i + \int_{-\infty}^x f(u) du$$

# Variabile Aleatorie Miste

- Esercizio.
  - ▶ Edificio dal valore di 100m€ soggetto a rischio incendio; con prob. 50% non c'è incendio; con prob 5% l'incendio distrugge l'edificio completamente; con prob. 45%, il danno da incendio è distribuito uniformemente tra 0 e 100m€  
trovare la cdf del danno  $X$
  - ▶  $X$  danno totale di un portafoglio con distribuzione  $\text{Exp}(\lambda)$ ; cessione in un trattato riassicurativo stop loss con franchigia  $d$  e limite  $l$  (con  $l > d$ )

$$Y = \min\{\max\{X - d, 0\}, l - d\}$$

trovare la cdf di  $Y =$  perdita ceduta al riassicuratore