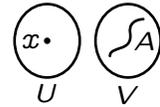


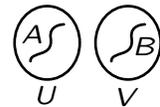
## Assiomi di separazione $T_3$ e $T_4$

**Def.** Uno spazio topologico  $X$  è detto:

$T_3$  o *regolare* se  $X$  è  $T_1$  e  $\forall x \in X, \forall A \subset X$  chiuso t.c.  $x \notin A$ ,  
 $\exists U, V \subset X$  aperti t.c.  $x \in U, A \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .



$T_4$  o *normale* se  $X$  è  $T_1$  e  $\forall A, B \subset X$  chiusi t.c.  $A \cap B = \emptyset$ ,  
 $\exists U, V \subset X$  aperti t.c.  $A \subset U, B \subset V$  e  $U \cap V = \emptyset$ .



**Oss.**  $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$  (i punti sono chiusi).  
 ~~$\Rightarrow$~~   ~~$\Rightarrow$~~   ~~$\Rightarrow$~~

**N. B.** La terminologia è controversa.  $T_3$  e  $T_4$  sono accettati secondo la definizione data. Per quanto riguarda regolare e normale seguiamo il Kornsowski, il Munkres e il Sernesi che li danno come sinonimi risp. di  $T_3$  e  $T_4$ , mentre in altre referenze non si assume  $T_1$ .

**N. B.** Esistono spazi  $T_3$  non  $T_4$ , uno lo vedremo (forse) più avanti. Esempi di spazi  $T_2$  non  $T_3$  esistono ma non li esamineremo.

**Prop.**  $T_3$  e  $T_4$  sono proprietà topologiche e  $T_3$  è ereditaria.

*Dim.*  $T_3$  e  $T_4$  proprietà topologiche: simile a  $T_2$  nella lezione precedente. Mostriamo che  $T_3$  è ereditaria. Sia  $X$  uno spazio  $T_3$  e  $Y \subset X$  sottospazio. Dobbiamo far vedere che  $Y$  è  $T_3$ .  $Y$  è  $T_1$  perché  $T_1$  è ereditaria.

$\forall x \in Y, \forall A \subset Y$  chiuso in  $Y$  t.c.  $x \notin A, \exists A' \subset X$  chiuso in  $X$  t.c.  $A = A' \cap Y \Rightarrow x \notin A' \Rightarrow \exists U, V \subset X$  aperti t.c.  $x \in U, A' \subset V, U \cap V = \emptyset \Rightarrow U \cap Y$  e  $V \cap Y$  aperti in  $Y$  t.c.  $x \in U \cap Y, A \subset V \cap Y, (U \cap Y) \cap (V \cap Y) = \emptyset$ .  $\square$

**Oss.** La dimostrazione non si estende a  $T_4$  perché non è detto che esistano chiusi *disgiunti*  $A', B' \subset X$  t.c.  $A = A' \cap Y, B = B' \cap Y$ .

**N. B.**  $T_4$  non è ereditaria, esistono controesempi ma non li esaminiamo. Per controesempi in topologia vedi Steen e Seebach, *Counterexamples in Topology*, e il database online <https://topology.pi-base.org/>

**Esempio.** La retta di Sorgenfrey  $R_\ell$  è  $T_4$ . Infatti è  $T_1$  (punti chiusi).

$\forall A, B \subset R_\ell$  chiusi disgiunti non vuoti  $\Rightarrow$

$\forall a \in A \exists a' > a$  t.c.  $[a, a'[ \subset R_\ell - B$  (aperto) e

$\forall b \in B \exists b' > b$  t.c.  $[b, b'[ \subset R_\ell - A$  (aperto)  $\rightsquigarrow$

$$U = \bigcup_{a \in A} [a, a'[ \quad V = \bigcup_{b \in B} [b, b'[$$

aperti t.c.  $A \subset U, B \subset V, U \cap V = \emptyset$ .

**Oss.** Per scegliere gli  $a'$  e  $b'$  occorre l'Assioma della scelta.

**Teor.** Ogni spazio metrizzabile è  $T_4$ .

*Dim.*  $(X, d)$  spazio metrico  $\Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$ .

$\forall A, B \subset X$  chiusi non vuoti disgiunti  $\rightsquigarrow$

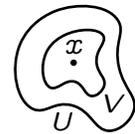
$$U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\}$$

$$V = \{x \in X \mid d(x, A) > d(x, B)\}.$$

Disuguaglianze continue strette incompatibili  $\Rightarrow U, V$  aperti e  $U \cap V = \emptyset$ .  
 $A$  e  $B$  chiusi disgiunti  $\Rightarrow A \subset U$  e  $B \subset V$ . Quindi  $X$  è  $T_4$ .  $\square$

**Oss.**  $\mathbf{R}^n$ ,  $\mathbf{C}^n$  e i loro sottospazi sono  $T_4$  perché metrizzabili. In particolare  $B^n$  e  $S^n$  sono  $T_4$ .

**Prop.** Sia  $X$  spazio  $T_3$ .  $\forall x \in X, \forall U \subset X$  intorno aperto di  $x$ ,  
 $\exists V \subset X$  intorno aperto di  $x$  t.c.  $\text{Cl}_X V \subset U$ .



*Dim.*  $A := X - U$  chiuso e  $x \notin A \Rightarrow \exists V, W \subset X$  aperti t.c.

$x \in V, A \subset W, V \cap W = \emptyset \Rightarrow V \subset X - W \subset X - A = U$  e  $X - W$  chiuso  
 $\Rightarrow \text{Cl}_X V \subset X - W \subset U$ .  $\square$

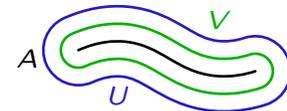
**Cor.** Supponiamo che  $X$  sia  $T_1$ . Allora  $X$  è  $T_3 \Leftrightarrow$  ogni punto  $x \in X$  ammette base di intorni chiusi.

*Dim.*  $\Rightarrow$  Per la Prop. la famiglia degli intorni chiusi di  $x$  è base di intorni.

$\Leftarrow$   $X$  è  $T_1$  per ipotesi.  $\forall A \subset X$  chiuso,  $\forall x \in X - A, \exists W \subset X$  intorno chiuso di  $x$  t.c.  $W \subset X - A \rightsquigarrow U = \text{Int}_X W, V = X - W$  aperti t.c.  
 $x \in U, A \subset V, U \cap V = \emptyset$ .  $\square$

Per gli spazi  $T_4$  valgono enunciati analoghi, le dimostrazioni sono simili e vengono lasciate per [Esercizio](#).

**Prop.** Sia  $X$  spazio  $T_4$ .  $\forall A \subset X$  chiuso,  $\forall U \subset X$  intorno aperto di  $A$   
 $\exists V \subset X$  intorno aperto di  $A$  t.c.  $\text{Cl}_X V \subset U$ .



**Cor.** Supponiamo che  $X$  sia  $T_1$ . Allora  $X$  è  $T_4 \Leftrightarrow$  ogni chiuso  $A \subset X$  ammette base di intorni chiusi.