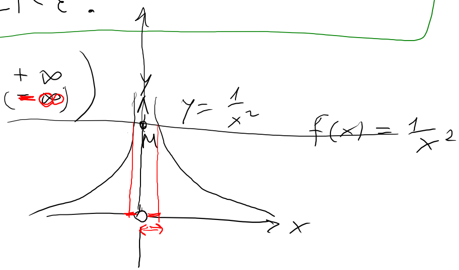
16 ottobre

Ricordiamo che se $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$, $L \in \mathbb{R}$, scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se

$\forall \varepsilon \in (0, +\infty)$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta_\varepsilon > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon \ \text{ e } x \in X \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon .}$$

Def (di $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ ($-\infty$))



Esempio

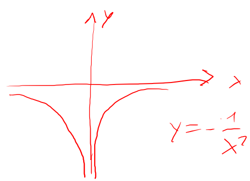
Vogliamo $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ significa

$\forall M > 0 \quad \exists\, \delta_M > 0 \quad \text{t.c.} \quad 0 < |x - x_0| < \delta_M \ \text{ e } x \in X$

$\Rightarrow \quad f(x) > M$

$(f(x) < -M)$



Dimostriamo che $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$

$$\frac{1}{x^2} > M \iff \frac{1}{M} > x^2 \iff -\frac{1}{\sqrt{M}} < x < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

$$\iff 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}$$

Scelgo $\delta_M = \frac{1}{\sqrt{M}}$

Definizione alternativa di limite:

Def Sia $f : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$,

allora scriviamo $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ se,

per ogni successione $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ in $X \setminus \{x_0\}$

t.c. $\lim_{n \to +\infty} x_n = X_0$ si ha

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$$

Teor (Regole) Date $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in X'$

con $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$. Valgono

1) (somma) $\lim_{x \to x_0} \left(f(x) + g(x) \right) = a + b$ eccetto

i casi indefiniti $(a, b) = \begin{cases} (+\infty, -\infty) \\ (-\infty, +\infty) \end{cases}$

2) (prodotto) $\lim_{x \to x_0} f(x) g(x) = a \cdot b$ eccetto

i casi indefiniti $(a, b) = \begin{cases} (\pm\infty, 0) \\ (0, \pm\infty) \end{cases}$

3) (quoziente) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$ $\quad g(x) \neq 0 \ \forall x \in X$

salvo $b = 0$ e i casi $(a, b) = (\pm\infty, \pm\infty)$

Esempi 1) $\lim_{x \to x_0} c = c$

2) $\lim_{x \to x_0} x = x_0$

1) Dobbiamo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow |\underbrace{c(x) - c}_{0}| < \varepsilon$

$\delta_\varepsilon = 1$

2) Devo dimostrare che

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0$ t.c. $0 < |x - x_0| < \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

Basta scegliere $\delta_\varepsilon = \varepsilon$, perché allora

$|x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$.

3) Sia $p(x) = a_n x^n + \dots + a_0$

esempio $p(x) = 4x^{10} + 6x^8 + \frac{\pi}{3} x^3 + 1$

$\lim_{x \to 3} p(x) = p(3)$

$\lim_{x \to 3} \left(4x^{10} + 6x^8 + \frac{\pi}{3} x^3 + 1 \right) =$

$= \lim_{x \to 3} 4x^{10} + \lim_{x \to 3} 6x^8 + \lim_{x \to 3} \frac{\pi}{3} x^3 + \lim_{x \to 3} 1$

$= 4 \, 3^{10} + 6 \, 3^8 + \frac{\pi}{3} 3^3 + 1$

$= p(3)$

Teor Siano $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$

Supponiamo che $f(x) \le g(x)$ $\forall x \in X$ e che esistano $\lim_{x \to x_0} f(x) = a \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lim_{x \to x_0} g(x) = b \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora $a \le b$

Teor (carabinieri) $f, g, h : X \to \mathbb{R}$, $x_0 \in X'$ con

$f(x) \le h(x) \le g(x)$ e con

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = L \in \overline{\mathbb{R}} .$$

Allora $\lim_{x \to x_0} h(x) = L$.

Teorema $\sin(x)$ e $\cos(x)$ sono funzioni continue in $\mathbb{R}$.

Dim Per prima cosa verifichiamo che $\lim_{x \to 0} \sin(x) = 0$ $*$

Questo limite sarà una conseguenza della disuguaglianza

(1) $$|\sin x| \le |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Sezione è facile dimostrare che $\lim_{x \to 0} |x| = 0$

dalla (1) segue $-|x| \le \sin x \le |x|$

$\quad\; \downarrow \qquad\quad \downarrow \qquad \downarrow$

$\quad\; 0 \qquad\quad\; 0 \qquad\; 0$

ϑ

Per i Carab. segue $*$

Dimostriamo $|\sin x| \le |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$

che possiamo riscrivere

(2) $$|\sin(\vartheta)| \le |\vartheta| \quad \forall \vartheta \in \mathbb{R} .$$

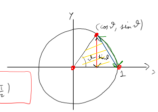
Per $|\vartheta| \ge \frac{\pi}{2}$ ho $|\vartheta| \ge \frac{\pi}{2} > 1 \ge |\sin \vartheta|$

$\Longrightarrow$ (2)

Sia ora $|\vartheta| < \frac{\pi}{2}$

Iniziamo col dimostrare che

$$\boxed{0 < \sin\vartheta < \vartheta \qquad \forall \; \vartheta \in (0, \tfrac{\pi}{2})}$$



Area triangolo $= \dfrac{\sin\vartheta}{2}$

Area settore circolare $= \dfrac{\vartheta}{2}$

$$\frac{\sin\vartheta}{\cancel{2}} < \frac{\vartheta}{\cancel{2}}$$

Cosa resta da dimostrare che $|\sin\vartheta| \le |\vartheta|$ $\forall \vartheta \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$

Dimostriamo che

$$\vartheta < \sin\vartheta < 0 \qquad \forall \vartheta \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0)$$

$\Updownarrow$

$$0 < -\sin\vartheta < -\vartheta \qquad \forall \vartheta \in (-\tfrac{\pi}{2}, 0)$$

$\Updownarrow \qquad\qquad \forall -\vartheta \in (0, \frac{\pi}{2})$

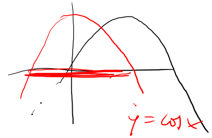
$$\boxed{0 < \sin(-\vartheta) < -\vartheta \qquad \forall -\vartheta \in (0, \tfrac{\pi}{2})}$$

2) $\lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos(0)$

$\Updownarrow$

$\lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



$$|x| < \frac{\pi}{2}$$

$$0 \leq 1 - \cos(x) = (1 - \cos x)\,\frac{1 + \cos x}{1 + \cos x} =$$

$$= \frac{1 - \cos^2 x}{1 + \cos x} = \frac{1}{1 + \cos x}\sin^2 x \leq \sin^2 x$$

Abbiamo dimostrato

$$\underset{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}}{0} \leq 1 - \cos x \leq \underset{\substack{\downarrow x \to 0 \\ 0}}{\sin^2 x} \qquad \forall \qquad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \lim_{x \to 0} (1 - \cos x) = 0$$

3) $$\lim_{x \to x_0} \sin x = \sin x_0 \qquad \lim_{x \to x_0} \sin x = \lim_{h \to 0} \sin(x_0 + h)$$

$$\sin(x) = \qquad\qquad x = x_0 + h$$

$$= \underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ \sin(x_0)}}{\sin(x_0 + h)} = \underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ \sin(x_0)}}{\sin(x_0)}\,\underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 1}}{\cos(h)} + \underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ \cos(x_0)}}{\cos(x_0)}\,\underset{\substack{\downarrow h \to 0 \\ 0}}{\sin(h)}$$