AUTOVALORI E AUTOVETTORI

Consideriamo come esempio introduttivo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e osserviamo che $\quad Ae_2 = A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 3e_2$

Cioè A agisce su e_2 semplicemente moltiplicando e_2 per $\lambda = 3$.

In generale, se A è una matrice $n \times n$ diremo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è <u>un autovalore di A</u> se e solo se $\exists\, v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, t.c.

$$\boxed{Av = \lambda v.}$$

tale v si dice <u>autovettore</u>

Trovare gli autovalori e gli autovettori di A è molto importante in vari contesti.

Come si trovano gli autovalori e gli autovettori?

Osserviamo che

1) $\lambda \in \mathbb{R}$ è autovettore di $A \iff$
$\ker(A - \lambda I) \neq (0)$

di conseguenza

2) λ è autovalore di $A \iff \det(A-\lambda I)=0$.

Osserviamo che, posto $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & \text{se } i=j\\ 0 & \text{se } i\neq j\end{cases}$

$$\det(A-\lambda I) = \det\left((a_{ij}-\lambda\delta_{ij})_{ij}\right)$$

$$= P(\lambda) \quad \text{polinomio in } \lambda$$

Ad esempio

.) $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ $\qquad A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2\\ 3 & 4-\lambda\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)(4-\lambda)-6$$

.) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ $\qquad A-\lambda I=\begin{pmatrix}1-\lambda & 2 & 1\\ 0 & -\lambda & -1\\ 2 & 1 & 2-\lambda\end{pmatrix}$

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\left(-\lambda(2-\lambda)+1\right)+2(-2+\lambda)$$

Il polinomio $P(\lambda)=\det(A-\lambda I)$
si dice <u>polinomio caratteristico</u> di A

Gli autovalori di A sono le radici reali di A.

[N.B. Più in generale si prendono in considerazione anche le radici complesse, ma ad esse corrisponderanno autovettori con coordinate complesse]

Una volta trovato un autovalore $\lambda \in \mathbb{R}$ per trovare i corrispondenti autovettori bisogna risolvere

$$(A-\lambda I)v = 0 .$$

Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad A-\lambda I = \begin{pmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A-\lambda I) &= -(3-\lambda)(2+\lambda)+4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 + 4 \\ &= \lambda^2 - \lambda - 2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$$

ci sono due autovalori, $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = +2$.

Cerchiamo gli autovettori.

$$A - \lambda_1 I = A + I = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

devo trovare $v = (v_1, v_2)$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} 4v_1 - 2v_2 = 0 \\ 2v_1 - v_2 = 0 \end{cases}$$

Sono due equazioni una multipla dell'altra, le soluzioni sono $\{(y, 2y) \mid y \in \mathbb{R}\}$

un autovettore quindi ad esempio è $(1, 2)$

In modo analogo si determinano gli autovettori relativi a $\lambda_2 = 2$.

AUTOVALORI DI MATRICI SIMMETRICHE

Una matrice $A = (a_{ij})_{ij} \in M^{n \times n}$
si dice "simmetrica" $\iff a_{ij} = a_{ji} \ \forall ij$

es.
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

TEOREMA

Se $A = (a_{ij})_{ij}$ è simmetrica allora le radici del suo polinomio caratteristico sono tutte reali

Idea della dimostrazione

Se $\lambda \in \mathbb{C}$ è t.c. $\det(A - \lambda I) = 0$

allora $\exists\ v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ t.c.

$$A v = \lambda v .$$

Allora $A \bar{v} = \bar{\lambda} \bar{v}$.

Ora si ha

$$\sum_i (Av)_i \bar{v}_i = \sum_i (\lambda v)_i \bar{v}_i = \lambda \sum_i v_i \bar{v}_i = \lambda \sum_{i=1}^n |v_i|^2$$

$$= \sum_i \left(\sum_j a_{ij} v_j\right) \bar{v}_i = \sum_j \left(\sum_i a_{ij} \bar{v}_i\right) v_j =$$

$$= \sum_j \left(\sum_i a_{ji} \bar{v}_i\right) v_j = \sum_j (A\bar{v})_j v_j = \sum_j \bar{\lambda} \bar{v}_j v_j$$

$$= \bar{\lambda} \sum_j |v_j|^2$$

$$\Rightarrow \lambda = \bar{\lambda} \Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$$

$\boxtimes$

Osserviamo anche che se $\lambda \neq \mu$ sono autovalori di A simmetrica, e v, w sono corrispondenti autovettori, si ha che

$$A v \cdot w = \sum_{ij} a_{ij} v_j w_i = \sum_{ji} a_{ji} v_j w_i = A w \cdot v$$

$$A v \cdot w = \lambda\, v \cdot w, \qquad A w \cdot v = \mu\, v \cdot w$$

$$\Rightarrow \; v \cdot w = 0 .$$

Si può dimostrare che se λ ha molteplicità k, allora $\ker(A - \lambda I)$ ha dimensione k.

Si può quindi costruire una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$ formata da autovettori di A.