Esercizi di Geometria
2023/2024
terzo foglio

October 16, 2023

1. Si determini se i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$
siano linearmente dipendenti o linearmente indipendenti.

2. Si determinino i valori del parametro t per cui i vettori
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$
risultano linearmente indipendenti.

3. Si dica se i seguenti insiemi di vettori di $\mathbb{R}^2$ formano un sistema di generatori per $\mathbb{R}^2$:
$$\mathcal{G} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{H} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad \mathcal{I} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

4. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$, e siano v_1, v_2 due vettori linearmente indipendenti di V. Si dimostri che v_1+v_2, v_1-v_2 sono ancora linearmente indipendenti.

5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano
$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$
due suoi sottospazi vettoriali.

   Si dimostri che l'intersezione
$$U \cap W \subseteq V$$
è ancora un sottospazio vettoriale.

6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ due suoi sottospazi vettoriali. Il **sottospazio vettoriale somma** $U + W$ è così definito:

$$U + V := \{v \in V \mid \exists u \in U, \exists w \in W, \text{ tali che } v = u + w\},$$

   è dato cioè da tutte le possibili somme di vettori di U con vettori di W.

   Si dimostri che $U + W$ è un sottospazio vettoriale.

7. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano $U \subseteq V$, $W \subseteq V$ due suoi sottospazi vettoriali. Si dimostri che $U + W \supseteq U \cup W$ e che $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $U \cup W$.