Lezione 12 ottobre 2023

giovedì 12 ottobre 2023 11:12

Visto: $\mathrm{Span}\{v_1, \dots, v_k\} = \{$combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_k\}$

$$= \{c_1 v_1 + \dots + c_k v_k \mid c_1, \dots, c_k \in K\}$$

PROP. $\underset{= W}{\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)} \subseteq V$ è SSV.

Dim.: Abbiamo visto che $\boxed{W1}$ & $\boxed{W2}$ $\Longleftrightarrow$ $\boxed{*}$

Dimostriamo quindi $\boxed{*}$. Siano $a, b \in \mathbb{K}$ arbitrari
$w_1, w_2 \in W$ arbitrari.

$$w_1 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$$

$$w_2 = d_1 v_1 + d_2 v_2 + \dots + d_k v_k$$

$$a \cdot w_1 + b\, w_2 = a \cdot (c_1 v_1 + \dots + c_k v_k) + b\, (d_1 v_1 + \dots + d_k v_k)$$
$$= (a c_1 + b d_1) v_1 + \dots + (a c_k + b d_k) \cdot v_k \in W$$

in fine: $W \neq \emptyset$, $0_V = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{K}}}{0} \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k \in W$

OSS. ① ogni $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$, $\forall i = 1, \dots, k$

Infatti:

$$v_1 = \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{K}}}{1} \cdot v_1 + \underset{\substack{\cap \\ \mathbb{K}}}{0} \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k$$

$$v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_k$$

$$\vdots$$

$$v_k = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 1 \cdot v_k$$

② consideriamo $v_1, \dots, v_k$, e sia l t.c. $1 \leq l < k$; allora si ha
$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l, \dots, v_k)$

infatti: se $w \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l)$

$$w = c_1 v_1 + \dots + c_l v_l = c_1 v_1 + \dots + c_l v_l + 0 \cdot v_{l+1} + \dots + 0 \cdot v_k$$

$$\Longrightarrow w \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

⚠ non è detto che $l < k \Rightarrow \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Es: $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $\quad v_2 = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$= 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left\{ c_1 \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix}c_1\\c_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}5c_2\\5c_2\end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\overset{!}{=} \left\{ \begin{pmatrix}c_1 + 5c_2\\c_1 + 5c_2\end{pmatrix} \;\middle|\; c_1, c_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \left\{ d\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}d\\d\end{pmatrix} \;\middle|\; d \in \mathbb{R} \right\}$$

Def: Sia V uno sv su $\mathbb{K}$.
Se $\exists\ v_1, \dots, v_k \in V$ tali che

$$V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$$

allora V si dice FINITAMENTE GENERATO.

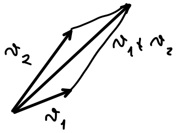
In altre parole: ogni $v \in V$ è comb. lineare $v_1, \dots, v_k$.

L'insieme $\{v_1, \dots, v_k\}$ si dice INSIEME DI GENERATORI per V.

Vogliamo ora capire come decidere se un generatore è superfluo oppure no.

Idea: $\underset{v \neq 0}{\mathrm{Span}(v)} = \mathrm{Span}(v, c \cdot v)$

$$\mathrm{Span}(v_1, v_2) \underset{\subseteq}{=} \mathrm{Span}(v_1, v_2, \underbrace{c_1 v_1 + c_2 v_2}_{\in \mathrm{Span}(v_1, v_2)})$$



Basta $\supseteq$: $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2, c_1 v_1 + c_2 v_2)$

$$w = d_1 v_1 + d_2 v_2 + d_3 (c_1 v_1 + c_2 v_2)$$
$$= (d_1 + d_3 \cdot c_1) v_1 + (d_2 + d_3 \cdot c_2) \cdot v$$
$$\in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$$

Def.: Siano $v_1, \dots, v_m \in V$; si dicono LINEARMENTE DIPENDENTI (LIN DIP) se uno di essi è combinazione lineare degli altri.

Es: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$; i vettori

$\boxed{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}} \in \mathbb{R}^2$ sono LIN. DIP

$$\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$$

⚠ invece: $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ NON sono LIN.DIP perchè non sono proporz.

$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ NON sono LIN.DIP

$\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ NON sono LIN.DIP.

Def.: I vettori $v_1, \dots, v_m \in V$ si dicono LINEARMENTE INDIPENDENTI (LIN. IND.) se non sono linearmente dipendenti

PROP. $v_1, \dots, v_m$ sono LIN. DIP. $\iff$ $\exists$ una combinazione $a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V$ con a_i non tutti nulli (cioè: $\exists\, i : a_i \neq 0$)

Dim. : $\Rightarrow$: Supp. LIN. DIP.

Per definizione: $\exists\, \bar{i}$: $v_{\bar{i}} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq \bar{i}}}^{m} c_i v_i$

$$\Rightarrow c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots \underbrace{- v_{\bar{i}}}_{\substack{(-1)\cdot v_{\bar{i}} \\ \neq 0}} + c_{\bar{i}+1} v_{\bar{i}+1} + \dots + c_m v_m = 0_V$$

e questa è una comb. lin. a coeff. non tutti nulli che dà 0_V.

Viceversa: $\Leftarrow$: Supp. $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_m v_m = 0_V$ coeff. non tutti nulli

$$\exists\, k : a_k \neq 0$$

$$a_k v_k = -\sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{m} a_i v_i \Big/ \cdot a_k^{-1}$$

, $a_k \in \mathbb{K}$

$a_k \neq 0$

$\Rightarrow \exists\, a_k^{-1}$

$$v_k = (-a_1 a_k^{-1}) v_1 + (-a_2 \cdot a_k^{-1}) \cdot v_2 + \dots + (-a_{k-1} a_k^{-1}) v_{k-1} + $$

$$+ (-a_{k+1} a_k^{-1}) v_{k+1} + \dots (-a_m a_k^{-1}) v_m$$

($a_k \cdot v_k = 0_V$, $a_k \neq 0$

$$v_k = 0_V$$

COROLLARIO: $v_1, \dots, v_m$ sono LIN. INDIP.
$\Leftrightarrow$ l'unica comb. lineare di $v_1, \dots, v_m$ che dia il vettore nullo 0_V è quella con coeff. TUTTI NULLI (combinazione nulla).

$$a_1 v_1 + \dots + a_m v_m = 0_V$$

Def: Sia V uno SV su $\mathbb{K}$.

Un insieme di vettori $\{v_1, \dots, v_n\}$ si dice **BASE DI V** se verifica:

(B1) $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono generatori per V:

$$V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$$

(B2) $\{v_1, \dots, v_n\}$ sono LIN. INDIP.

Teorema: $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ è base di V,

$\Longleftrightarrow$ ogni vettore $v \in V$ si può scrivere in modo UNICO come comb. lineare di $v_1, \dots, v_n$:

$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$

Def: Tale n-pla di scalari è chiamata n-pla delle COORDINATE di v nella base $\mathcal{B}$.

Dim.: $\Longrightarrow$: Supp. $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ base

sia $v \in V$ arbitrario

$\mathcal{B}$ base $\Rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ generatori

$\Rightarrow v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$

dobbiamo verificare l'unicità di questa espressione:

supp. $v = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ altra espressione

$$c_1 v_1 + \dots + c_n v_n = a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$$

$$(c_1 - a_1) v_1 + (c_2 - a_2) v_2 + \dots + (c_n - a_n) v_n = 0_V$$

$v_1, \dots, v_n$ sono LIN INDIP (perché $\mathcal{B}$ è base)

$$\Rightarrow \begin{cases} c_1 - a_1 = 0 \\ c_2 - a_2 = 0 \\ \vdots \\ c_n - a_n = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} c_1 &= a_1 \\ c_2 &= a_2 \\ &\vdots \\ c_n &= a_n \end{aligned}$$

Viceversa $\Leftarrow$: Supp. che ogni $v \in V$ si scriva in MODO UNICO come comb. lin. di $v_1, \dots, v_n$

Allora: in particolare, ogni $v \in V$ è comb. lineare, cioè $V = \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

$\rightarrow \{v_1, \dots, v_n\}$ generatori per V : (B1)

Verifichiamo LIN. INDIP.:

$\rightarrow$ in particolare 0_V si esprime in unico modo; oss. però che vale sempre

$$0_V = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \dots + 0 \cdot v_n$$

è unica $\Rightarrow$ non può esistere una comb lineare dei $v_1, \dots, v_n$ con coeff. non tutti nulli, che dia 0_V.

$\underset{\text{Prop.}}{\Longrightarrow}$ $v_1, \dots, v_n$ LIN. INDIP. (B2)

Esempi: ① $V = \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ è BASE

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ generatori per $\mathbb{R}^2$

LIN. INDIP.:

$$c_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right\} \text{ BASE CANONICA}$$

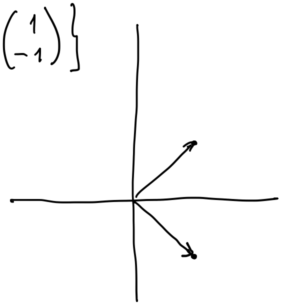
$$= \{e_1, e_2\} = (\mathcal{E})$$

Osservo, inoltre, che le coordinate di $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = a\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ nella $\mathcal{E}$ sono a, b; quindi nella $\mathcal{E}$ le

COORDINATE = COMPONENTI

② $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$

è base



B1 $$v = \begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} = c_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}c_1 + c_2\\c_1 - c_2\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = a \\ c_1 - c_2 = b \end{cases} \qquad \begin{array}{l} c_1 + c_1 - b = a \\ c_2 = c_1 - b \end{array} \qquad \boxed{\begin{cases} c_1 = \dfrac{a+b}{2} \\ c_2 = \dfrac{a-b}{2} \end{cases}}$$

B2 $$d_1\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + d_2\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}d_1 + d_2\\d_1 - d_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \qquad \begin{cases} d_1 + d_2 = 0 \\ d_1 - d_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} 2d_1 = 0 \Rightarrow d_1 = 0 \\ d_1 = d_2 \Rightarrow d_2 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow \mathcal{B}$ è base; dato $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$, le sue coordinate

sono $\dfrac{a+b}{2}$, $\dfrac{a-b}{2}$

③ $V = \mathbb{R}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathcal{E} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base CANONICA

(B1) $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

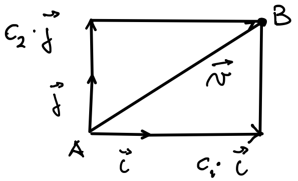
(B2) $c_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff c_1 = c_2 = c_3 = 0$$

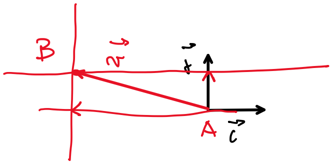
④ $\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R} \right\}$

$\mathcal{E} = \left\{ \underset{e_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \underset{e_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}, \dots, \underset{e_n}{\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}$ BASE CANONICA DI $\mathbb{R}^n$

⑤ Cons. V^2:



$\vec{v} = c_1 \cdot \vec{i} + c_2 \cdot \vec{j}$



$\Rightarrow \mathcal{B} = \{\vec{i}, \vec{j}\} \Rightarrow$ ad ogni $\vec{v} \in V^2$

associo una coppia di

COORDINATE a, b

Fissata $\mathcal{B}$

$$\Rightarrow \quad F_{\mathcal{B}} : \mathcal{V}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \; ; \; F_{\mathcal{B}} \text{ è biiettiva}$$

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Oss.: $F_{\mathcal{B}}(\vec{v}) = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad F_{\mathcal{B}}(\vec{w}) = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$

$$F_{\mathcal{B}}(\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} a + c \\ b + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$F_{\mathcal{B}}(h \cdot \vec{v}) = \begin{pmatrix} h a \\ h b \end{pmatrix} = h \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$