Lezione 13 ottobre 2023

venerdì 13 ottobre 2023 11:06

Visto: generatori, LIN. INDIP., BASE per SV finitamente generati

Def.: Se $\{v_i\}_{i \in I}$, con $v_i \in V$,

I è un insieme di indici infinito,

allora $\text{Span}(\{v_i\}_{i \in I}) = \{$combinazioni lineari FINITE di vettori di $\{v_i\}_{i \in I}\}$

Prop.: $\text{Span}(\{v_i\}_{i \in I})$ è SSV di V.

Dim.: esercizio

Esempio: $V = \mathbb{R}[x]$ polinomi in 1 variabile

oss. che $\mathbb{R}[x]$ NON è finitamente generato.

Infatti, se per assurdo

$$x^{d+1} \in \mathbb{R}[x] = \text{Span}(p_1(x), p_2(x), \dots, p_k(x))$$

allora posso cons. $d := \max\{\text{grado } p_i(x) \mid i = 1, \dots, k\}$

allora vedo che $x^{d+1} \notin \text{Span}(p_1(x), \dots, p_k(x))$

ASSURDO

INVECE: posso scrivere

$$\mathbb{R}[x] = \text{Span}(\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}})$$
$$= \text{Span}(\{1, x, x^2, x^3, x^4, \dots\})$$

Def.: Un insieme $\{v_i\}_{i \in I}$, I infinito

si dice FAMIGLIA LIBERA se ogni suo sottoinsieme finito è costituito da vettori LINEARM. INDIP.

Esempio: $V = \mathbb{R}[x]$, $\{x^i\}_{i \in \mathbb{N}}$

è famiglia Libera; infatti, cons. un sottoins. finito formato da k+1 elementi : $x^{i_0}, x^{i_1}, \dots, x^{i_k}$

se $j \neq l$ $i_j \neq i_l$ $\quad (x^3, x^{17}, x^{25})$

$$a_0 x^{i_0} + a_1 x^{i_1} + \dots + a_k x^{i_k} \overset{\circledast}{=} 0_{R[x]}$$

polinomio nullo

Dal Principio di identità dei polinomi (delle funzioni polinomiali), $\circledast$ vale

$\Longleftrightarrow a_0 = a_1 = \dots = a_k = 0.$

Def. Un insieme di vettori che sia un insieme di generatori e sia famiglia libera si dice BASE DI V.

* * *

OSS. SU DIP. & INDIP. :

① v_1 è LIN. DIP. $\Longleftrightarrow$ $\exists\, a_1 \neq 0$ t.c.

$$a_1 \cdot v_1 = 0_V \quad / \cdot a_1^{-1}$$

$$a_1^{-1} \cdot a_1 \cdot v_1 = a_1^{-1} \cdot 0_V$$

$$\Longleftrightarrow v_1 = 0_V$$

Conseg. v_1 è LIN. INDIP $\Longleftrightarrow$ $v_1 \neq 0_V$

② v_1, v_2 sono LIN. DIP. $\Longleftrightarrow$ $\exists\, a_1 v_1 + a_2 v_2 = 0_V$

con $a_1 \neq 0$ opp. $a_2 \neq 0$

se: $a_1 \neq 0 \Longrightarrow$

$$v_1 = -\frac{a_2}{a_1} \cdot v_2$$

se $a_2 \neq 0 \Longrightarrow v_2 = -\frac{a_1}{a_2} v_1$

$\Longleftrightarrow$ sono proporzionali

Conseg. : v_1, v_2 sono LIN. INDIP. $\Longleftrightarrow$ NON sono proporzionali

③ Se $v_i = 0_V$ e cons. $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, 0_V, v_{i+1}, \dots, v_k$

allora

$$0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + 0\cdot v_{i-1} + \textcircled{1\cdot}\, 0_V + 0\cdot v_{i+1} + \dots + 0\cdot v_k = 0_V$$

è comb. lineare con coeff. non tutti nulli

→ sono LIN. DIP.

④ Siano $v_1, \dots, v_k$ LIN. INDIP.

Sia $1 \le l < k$, $l \in \mathbb{N}$

e cons. $v_1, \dots, v_l$: sono LIN. INDIP.

Infatti: $a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_l v_l = 0_V$

cons. $= a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_l v_l + 0\cdot v_{l+1} + \dots + 0\cdot v_k = 0_V$

$v_1, \dots, v_k$ LIN. INDIP. ⟹ tutti i coeff. sono nulli

$a_1 = a_2 = \dots = a_l = 0$

ATTENZIONE: $\{v_1, v_2, v_3\}$ e supp. che ogni coppia sia LIN. INDIP.:

$$\left.\begin{array}{l} \{v_1, v_2\} \text{ INDIP} \\ \{v_1, v_3\} \\ \{v_2, v_3\} \end{array}\right) \cancel{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \{v_1, v_2, v_3\} \\ \text{LIN. INDIP.} \end{array}$$

es: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

⑤ Se 2 vettori sono uguali: $v_i = v_j$, allora

$v_1, v_2, \dots, v_i, \dots, v_{j-1}, v_i, v_{j+1}, \dots, v_k$ sono LINEARMENTE DIP.

Infatti, una loro combinazione lineare a coeff. non tutti nulli che dà il vettore nullo è:

$$0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + \dots + \underset{\neq 0}{\boxed{1}}\, v_i + 0\cdot v_{i+1} + \dots + 0\cdot v_{j-1} + \underbrace{\overset{\neq 0}{\boxed{(-1)}}\, v_i}_{= -v_i} + 0\cdot v_{j+1} + \dots + 0\cdot v_k = 0_V$$

$\Rightarrow$ sono LIN. DIP.

* * *

TEOREMI DI ESTRAZIONE & COMPLETAMENO :

Teorema (Estrazione di una base da un insieme di generatori)

Sia V SV su $\mathbb{K}$, V finitamente generato, e sia $\{v_1, \dots, v_k\}$ un insieme di generatori: $V = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$.

Allora $\exists$ base $\mathcal{B} \subseteq \{v_1, \dots, v_k\}$ di V.

Per dim. Teo. servono 2 Lemmi:

LEMMA 1: Siano $u_1, \dots, u_\ell \in V$ e sia $u \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$, $u = b_1u_1 + \dots + b_\ell u_\ell$

Allora: $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u) = \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$.

Dim.: $\mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell) \subseteq \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u)$ vale sempre.

Basta dimostrare $\supseteq$: sia $\underline{w \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell, u)}$

$$\begin{aligned} w &= a_1u_1 + a_2u_2 + \dots + a_\ell u_\ell + a\cdot u \\ &= a_1u_1 + \dots + a_\ell u_\ell + a\cdot(b_1u_1 + \dots + b_\ell u_\ell) \\ &= (a_1 + ab_1)u_1 + \dots + (a_\ell + ab_\ell)u_\ell \end{aligned}$$

$\in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_\ell)$

LEMMA 2: Siano $u_1, \dots, u_h \in V$ LIN. INDIP, e sia

$$u \notin \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$$

Allora $u_1, \dots, u_h, u$ sono LIN. INDIP.

Dim:

Per assurdo: $\exists$ combi. lineare con coeff. non tutti nulli:

$$c_1 u_1 + \dots + c_h u_h + c \cdot u = 0_V$$

Osservo che per l'ipotesi $u_1, \dots, u_h$ LIN INDIP., necessariamente $c \neq 0$ altrimenti $c_1 u_1 + \dots + c_h u_h = 0_V$ con c_i non tutti nulli

$$\Rightarrow \quad c \cdot u = -c_1 u_1 - \dots - c_h u_h$$

$$u = -\frac{c_1}{c} u_1 - \dots - \frac{c_h}{c} u_h$$

$\rightarrow$ $u \in \mathrm{Span}(u_1, \dots, u_h)$ assurdo.

Dim. Teo. di Estrazione:

ALGORITMO DELLO SCARTO:

$\{v_1, \dots, v_k\}$

- cons. v_1:
  - se $v_1 = 0_V$, lo scarto
  - se $v_1 \neq 0_V$, lo scelgo: $v_1 \in \mathcal{B}$
- cons. v_2:
  - se $v_2 \in \mathrm{Span}(v_1)$, lo scarto
  - se $v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$, lo scelgo: $v_2 \in \mathcal{B}$

oss: $\mathrm{Span}(v_1, v_2)$ è rimasto invariato per Lemma 1

però i vettori scelti sono un insieme LIN. INDIP.
per Lemma 2

- cons. v_3 :
  - se $v_3 \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, lo scarto
  - se $v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$ lo scelgo : $v_3 \in \mathcal{B}$

Per Lemma 1: Span (vettori scelti finora) $= \mathrm{Span}(v_1, v_2, v_3)$

Per Lemma 2: i vettori scelti sono LIN. INDIP.

⋮

cons. v_i :
- se $v_i \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$, lo scarto
- se $v_i \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{i-1})$, lo scelgo : $v_i \in \mathcal{B}$

⋮

cons. v_k :
- se $v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, lo scarto
- se $v_k \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{k-1})$, lo scelgo $v_k \in \mathcal{B}$

Per costruzione si ha che

$$\mathrm{Span}(\mathcal{B}) = \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) = V$$

e che tutti i vettori di $\mathcal{B}$ sono LIN. INDIP. ⇒ formano una base.

Teorema del COMPLETAMENTO AD UNA BASE

Siano $v_1, \dots, v_p \in V$ lin. INDIP.

e V finitamente generato.

Allora $\exists$ base $\mathcal{B} \supseteq \{v_1, \dots, v_p\}$

Dim. V finit. generato $\Rightarrow \exists$ $w_1, \dots, w_r$ generatori

$$V = \mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r) \ni v_i \quad \forall i = 1, \dots, p$$

Cons.: $\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\}$ e oss. che è ancora un insieme di generatori

$$\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_p) = V$$

Posso applicare l'alg. di scarto all'insieme

$\{v_1, \dots, v_p, w_1, \dots, w_r\} \supseteq \mathcal{B}$ base

Per costruzione, l'alg. sceglierà i vettori

$v_1, \dots, v_p \in \mathcal{B}$

infatti: $v_1, \dots, v_p$ LIN. INDIP.

$\Rightarrow$ oss. ⑤ ogni sottoins. è LIN. INDIP.

in part. $v_1 \neq 0_V$: lo scelgo

v_2 : so che v_1, v_2 LIN INDIP.

$\Rightarrow v_2 \notin \mathrm{Span}(v_1)$

lo scelgo

v_3 : so che v_1, v_2, v_3 LIN. INDIP.

$\Rightarrow v_3 \notin \mathrm{Span}(v_1, v_2)$

lo scelgo

$\vdots$

v_p : $v_p \notin \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_{p-1})$

lo scelgo