# PERSONALIZZAZIONE DEL PREMIO BASATA SULL'ESPERIENZA

La **personalizzazione a priori** nella determinazione dei premi assicurativi ha l'obiettivo di ripartire un portafoglio in classi di rischi con forti caratteristiche di analogia e di determinare i premi da attribuire ai rischi di ciascuna classe.

I premi sono differenziati in funzione di caratteristiche specifiche dei rischi ritenute influenti sulla sinistrosità, **fattori di rischio** o **variabili tariffarie**, osservabili *a priori*: prima di disporre di informazioni sulla sinistrosità.

I rischi sono ripartiti in **classi tariffarie**, si ottiene così la **struttura della tariffa**, e si valutano i premi da richiedere agli assicurati di ciascuna classe, **premi *a priori*** o **premi collettivi**. Si ottiene la **tariffa.**

In alcune coperture, nell'ambito di ogni classe tariffaria rimane una notevole eterogeneità residua nella sinistrosità, causata da fattori non osservabili. Ad esempio in RCA: abilità nella guida, temperamento del guidatore, prontezza di riflessi, conoscenza e rispetto delle norme del codice della strada, abitudini di vita, … .

Inoltre, ci sono fattori di rischio che non possono essere utilizzati come variabili tariffarie, ad esempio, il sesso dell'assicurato.

Al fine di formulare previsioni sulla sinistrosità di un individuo può essere molto utile tenere conto della sua personale storia di sinistrosità. L'esperienza individuale di sinistrosità viene vista come rivelatrice di caratteristiche individuali, non osservabili *a priori*, che influenzano la sinistrosità e determinano l'eterogeneità residua nelle classi tariffarie.

Si attua una ulteriore differenziazione dei premi. I premi *a priori* sono modificati tenendo conto dell'esperienza individuale di ciascun assicurato: si riconoscono sconti agli assicurati virtuosi, si penalizzano con aggravi gli altri.

Si passa dunque dal premio *a priori* (o premio collettivo: comune ai rischi di una classe tariffaria) ad un **premio basato sull'esperienza individuale**, con l'obiettivo di valutare in modo migliore i rischi e dunque di fare pagare a ciascun assicurato, nel tempo, un premio che corrisponda maggiormente al profilo di rischio dell'assicurato.

**Premio *a priori* o collettivo**

$\Downarrow$ **Storia individuale di sinistrosità**

**Premio a posteriori o basato sull'esperienza**

Si parla di **personalizzazione basata sull'esperienza** (***experience rating*** o ***merit rating***). Può essere ottenuta seguendo diversi approcci

- approccio Bayesiano,
- approccio della Teoria della Credibilità,
- sistemi Bonus-Malus; *No-claim discount*.

**Richiami.** In uno spazio di probabilità,

$$(\mathbb{P}, \mathcal{A}, Pr(\cdot)),$$

*(i)* sia $Y$ un numero aleatorio (misurabile),

$$Y(\cdot): \mathbb{P} \to \mathbb{R}, \quad Y^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \text{ per ogni } B \in \mathcal{B} \text{ boreliano di } \mathbb{R},$$

tale che $E(|Y|) < +\infty$, (in particolare, $Y = |A|$, indicatore di evento);

*(ii)* sia $U$ un altro numero aleatorio (misurabile),

$$U(\cdot): \mathbb{P} \to \mathcal{X} \subset \mathbb{R}, \quad \mathcal{X} \text{ insieme immagine di } U(\cdot).$$

Se $U$ ha un numero finito di determinazioni e $Pr(U = u) > 0$, per ogni determinazione di $U$, si pone

$$E(Y|U = u) = \frac{E(Y|U = u|)}{Pr(U = u)}.$$

Segue $$E(Y) = \sum_u E(Y|U = u)Pr(U = u).$$

In tale caso si ha dunque la proprietà di disintegrabilità del valore atteso rispetto alla partizione associata a $U$.

**Funzione di regressione.** Si prova che, nelle ipotesi (i) e (ii), esiste una funzione, indicata con $E(Y|U=\cdot)$, detta **funzione di regressione** di $Y$ su $U$,

$$E(Y|U=\cdot): \ \mathcal{X} \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

tale che

- $E(Y|U=\cdot)$ è $P_U$ integrabile, dove $P_U$ è la misura immagine: $P_U(]-\infty,u]) = Pr(U \le u)$, ed è unica a meno di insiemi $P_U$-trascurabili,
- $E(Y|U\in B|) = \int_{\{U\in B\}} Y dPr = \int_B E(Y|U=u) P_U(du) = \int_B E(Y|U=u) dF_U(u)$, per ogni $B \in \mathcal{B}$, dove l'ultima uguaglianza sussiste se $E(Y|U=\cdot)$ è Riemann-Stieltjes integrabile. In tale caso, in particolare,

$$E(Y) = \int_{\mathbb{R}} E(Y|U=u) dP_U(du) = \int_{\mathbb{R}} E(Y|U=u) dF_U(u). \tag{3.1}$$

Collegamento della (3.1) con la proprietà di disintegrabilità della speranza matematica.

La funzione di regressione verifica le seguenti proprietà

$E(\alpha|U=\cdot)=\alpha$, se $\alpha$ è certo,

$E(Y_1|U=\cdot)\leq E(Y_2|U=\cdot)$, se $Y_1\leq Y_2$,

$E(Y_1|U=\cdot)=E(Y_2|U=\cdot)$, se $Y_1=Y_2$ qc,

$a\leq E(Y|U=\cdot)\leq b$, se $a\leq Y\leq b$,

$E(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Y_i\,|U=\cdot)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i E(Y_i|U=\cdot)$,

$E(h(U)Y|U=\cdot)=h(U)E(Y|U=\cdot)$,

$E(Y|U=\cdot)=E(Y)$, se $Y,U$ sono stocasticamente indipendenti.

Consideriamo ora la seguente composizione

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P} & \xrightarrow{\quad U(\cdot) \quad} & \mathcal{X} & \xrightarrow{\quad E(Y|U=\cdot) \quad} & \mathbb{R} \\ \omega & \longrightarrow & U(\omega) = u & \longrightarrow & E(Y|U = u) \end{array}$$

Rimane definito su $\mathbb{P}$ un numero aleatorio, che indichiamo con $E(Y|U)$, tale che

$$\omega \in \mathbb{P} \longrightarrow E(Y|U = U(\omega)). \tag{3.2}$$

La speranza matematica di $E(Y|U)$

$$E[E(Y|U)] = \int_{\mathbb{R}} E(Y|U = u) dF_U(u) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per (3.1)}}}{=} E(Y). \tag{3.3}$$

**Speranza matematica condizionata ad una $\sigma$-algebra.** Sia $\mathcal{H}$ una sotto-$\sigma$-algebra di $\mathcal{A}$. Si prova che, nelle ipotesi (i) e (ii), esiste un numero aleatorio, indicato con $E(Y|\mathcal{H})$, definito a meno di eventi di $\mathcal{H}$ di probabilità nulla, tale che

- $E(Y|\mathcal{H})$ è $\mathcal{H}$-Borel misurabile,
- $E(Y|H|) = \int_H YdPr = \int_H E(Y|\mathcal{H})dPr$, per ogni $H \in \mathcal{H}$. In particolare,

$$E(Y) = \int_\Omega YdPr = \int_\Omega E(Y|\mathcal{H})dPr = E[E(Y|\mathcal{H})]. \tag{3.4}$$

Dato il numero aleatorio $U$, misurabile, si può considerare la $\sigma$-algebra indotta da $U$, $\mathcal{U} = U^{-1}(\mathcal{B})$ e la speranza matematica di $Y$ condizionata a $\mathcal{U}$, $E(Y|\mathcal{U})$ che viene anche indicata con $E(Y|U)$.

Per la (3.4), si ha

$$E(Y) = E[E(Y|\mathcal{U})] = E[E(Y|U)].$$

Si veda la (3.3). Si prova che il numero aleatorio $E(Y|U)$ definito dalla (3.2) è una versione di $E(Y|\mathcal{U})$.

Nel seguito il numero aleatorio indicato con $E(Y|U)$, potrà essere inteso come il numero aleatorio definito dalla (3.2) o come $E(Y|\mathcal{U})$,

$$E(Y|U) \begin{cases} \nearrow \quad \omega \to U(\omega) = u \to \underbrace{\overbrace{E[Y|U = u]}^{\substack{\text{valore in } u \text{ della funzione} \\ \text{di regressione} \\ \text{di } Y \text{ su } U}}}_{\substack{\text{o speranza matematica} \\ \text{di } Y|U=u}} \\ \searrow \end{cases}$$

$E(Y|\mathcal{U})$ speranza matematica di $Y$ condizionata alla $\sigma$-algebra indotta da $U$

In tutti i casi si ha

$$E(Y) = E[E(Y|U)] = \int_{\mathbb{R}} E(Y|U = u) dF_U(u).$$

Le precedenti nozioni si estendono:

- $E(Y|U_1 = \cdot, \dots, U_n = \cdot)$ funzione di regressione di $Y$ su $U_1, \dots, U_n$,
- $E(Y|U_1, \dots, U_n)$, speranza matematica di $Y$ condizionata alla $\sigma$-algebra indotta da $U_1, \dots, U_n$,

con

$$E(Y) = E[E(Y|U_1, \dots, U_n)].$$

**Proprietà di scomposizione della varianza.** Nelle ipotesi (i) e (ii), supponiamo che il numero aleatorio $Y$ sia tale che $E(Y^2)$ sia finita. Allora esiste $E(Y^2|U)$ e sussiste la $E(Y^2) = E[E(Y^2|U)]$.

Si pone $$var(Y|U) = E(Y^2|U) - E(Y|U)^2.$$

Segue

$$E[var(Y|U)] = E[E(Y^2|U)] - E[E(Y|U)^2] = E(Y^2) - E[E(Y|U)^2]$$

e

$$var[E(Y|U)] = E[E(Y|U)^2] - (E[E(Y|U)])^2 = E[E(Y|U)^2] - E(Y)^2$$

Sommando membro a membro, si ottiene

$$E[var(Y|U)] + var[E(Y|U)] = E(Y^2) - E(Y)^2 = var(Y).$$ ■

## APPROCCIO BAYESIANO ALLA PERSONALIZZAZIONE BASATA SULL'ESPERIENZA

Consideriamo una collettività di rischi "analoghi", omogenei rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed "indipendenti". Nella collettività vi sia eterogeneità residua.

Per un fissato assicurato nella collettività, l'$i$-esimo, sia $Y_{it}$ un numero aleatorio di interesse legato alla sinistrosità nell'anno $t$, ad esempio

- $Y_{it} = N_{it}$ il numero di sinistri nell'anno $t$,
- $Y_{it} = X_{it}$ il risarcimento totale nell'anno $t$.

Al variare di $t$, si ottiene un processo stocastico a parametro discreto

$$\{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}.$$

Per tenere conto dell'eterogeneità residua dovuta a fattori **non osservabili**, si introduce un parametro **aleatorio**, $U_i$, specifico per il fissato assicurato, che è detto **parametro di rischio** o **componente di eterogeneità**.

Dato che $U_i$ è legato al **profilo di rischio** dell'assicurato, è naturale supporre che la valutazione probabilistica sulla sinistrosità dell'individuo dipenda dal valore del parametro di rischio. Si assume che, se il valore di $U_i$ fosse noto, attribuiremmo una specifica legge al processo dei numeri aleatori d'interesse.

Introduciamo le seguenti ipotesi:

- $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ siano stocasticamente indipendenti e di legge assegnata, per ogni $u$ determinazione di $U_i$,
- sia assegnata la legge di $U_i$ (la funzione di ripartizione $F_{U_i}$ o la funzione di densità $f_{U_i}$ o la funzione di probabilità nel caso discreto).

La funzione di ripartizione di $U_i$ è detta **funzione di struttura**.

Con le ipotesi dette, rimane assegnata la legge del processo $\{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ , ed è la legge mistura: dato $A$ evento logicamente dipendente dal processo,

$$Pr(A) = \int Pr(A|U_i = u)dF_{U_i}(u).$$

Abbiamo fissato l'attenzione su un assicurato della collettività, ma per ciascuno degli assicurati si ha un processo di numeri aleatori di interesse ed un parametro di rischio.

In forza dei giudizi qualitativi di "analogia" ed "indipendenza", si assume che i processi $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$, $i = 1,2, \dots$, siano

- identicamente distribuiti, più in dettaglio che
  - per ogni $u$, i processi $\{Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots\}$ siano identicamente distribuiti al variare di $i$,
  - i numeri aleatori $U_i$ siano identicamente distribuiti al variare di $i$,
- stocasticamente indipendenti: informazioni sulla storia di sinistrosità degli altri assicurati non portino a modificare la valutazione probabilistica del processo per l'assicurato *i*-esimo.

Si può allora fissare l'attenzione su un fissato assicurato della collettività: "individuo campione". Per semplificare la notazione, nel seguito, omettiamo l'indice dell'individuo. Sia

$$\{U, Y_1, Y_2, \dots\}$$

il processo del parametro aleatorio di rischio e dei numeri aleatori di interesse, con le ipotesi

- $Y_1|U = u, Y_2|U = u, \dots$ stocasticamente indipendenti, di legge assegnata, per ogni $u$ determinazione possibile di $U$,
- $U$ di legge assegnata.

Osserviamo che i numeri aleatori del processo $\{Y_1, Y_2, \dots\}$ **non sono stocasticamente indipendenti**. Ad esempio, fissato $n$,

$$F_{Y_1,\dots,Y_n}(y_1, \dots, y_n) = \int Pr(Y_1 \le y_1, \dots, Y_n \le y_n | U = u)\, dF_U(u)$$

$$= \int \prod_{t=1}^{n} Pr(Y_t \le y_t | U = u)\, dF_U(u)$$

↑ per l'indipendenza condizionata

$$\neq \prod_{t=1}^{n} \int Pr(Y_t \le y_t | U = u) dF_U(u) = \prod_{t=1}^{n} Pr(\, Y_t \le y_t).$$

Pertanto, le ipotesi introducono una particolare struttura di dipendenza stocastica tra i numeri aleatori del processo $\{Y_1, Y_2, \dots\}$: la dipendenza è dovuta unicamente al fatto che non si conosce il valore di $U$. Se fosse noto il valore del parametro di rischio, sarebbe noto il profilo di rischio dell'assicurato, e, in tale caso, i numeri aleatori di interesse sarebbero ritenuti stocasticamente indipendenti.

Trattiamo il problema di valutare il “premio equo” in $T+1$, inteso come la valutazione per la grandezza di interesse nell’anno $T+1$:

$$Y_{T+1} \begin{array}{l} \nearrow N_{T+1} \text{ numero dei sinistri: “premio equo per la frequenza”} \\ \searrow X_{T+1} \text{ risarcimento totale: premio equo} \end{array}$$

Notiamo che

$$E(Y_{T+1})$$

è **il premio equo *a priori*, il premio collettivo**, comune agli assicurati della collettività.

Ma questo premio non corrispondente al profilo di rischio dell’assicurato. Infatti, idealmente, se potessimo conoscere il valore del parametro di rischio e questo fosse $u$, il premio dovrebbe essere

$$E(Y_{T+1}|U=u) = \mu_{T+1}(u).$$

Tale premio è detto **premio individuale** in $T+1$.

Il valore di $U$ non è però osservabile, allora il **premio individuale** in $T+1$ **è aleatorio**

$$E(Y_{T+1}|U) = \mu_{T+1}(U).$$

Osserviamo che il premio collettivo è il valore atteso del premio individuale

$$E(Y_{T+1}) = E[E(Y_{T+1}|U)] = E[\mu_{T+1}(U)].$$

Al fine di stimare il premio individuale $E(Y_{T+1}|U)$, si potrebbe utilizzare il premio *a priori* $E(Y_{T+1})$.

Ma poiché i numeri aleatori del processo di interesse non sono stocasticamente indipendenti, informazioni sulla storia passata, su $Y_1, \dots, Y_T$, possono aiutare a migliorare la valutazione su $Y_{T+1}$, rispetto alla valutazione *a priori*.

Obiettivo della personalizzazione basata sull’esperienza: utilizzare le osservazioni sul processo dei numeri aleatori di interesse per passare dal premio collettivo ad un premio che meglio rispecchi il profilo di rischio dell’assicurato.

**Premio *a priori* o collettivo in $T+1$, $E(Y_{T+1})$**

$\Downarrow$ **Storia individuale di sinistrosità**

$Y_1, \dots, Y_T$

**Premio in $T+1$ *a posteriori* o basato sull’esperienza:**

**una previsione del premio individuale $E(Y_{T+1}|U)$**

Se $Y_1, \dots, Y_T$ sono numeri aleatori discreti e $y_1, \dots, y_T$ i valori osservati, posto $H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$, con $Pr(H_T) > 0$, come stima del premio individuale possiamo considerare il premio ***a posteriori*** o **premio bayesiano**

$$E(Y_{T+1}|H_T).$$

Si ha

$$E(Y_{T+1}|H_T) = \int \underbrace{E(Y_{T+1}|H_T,\ U = u)}_{\substack{= E(Y_{T+1}|U=u) \\ \uparrow \text{ indipendenza condizionata}}} dF_{U|H_T}(u)$$

$$= \int \mu_{T+1}(u) dF_{U|H_T}(u) = E[\mu_{T+1}(U)|H_T].$$

Notiamo che se $U$ ha distribuzione dotata di densità $f_U$ (densità *a priori*)

$$\int \mu_{T+1}(u) dF_{U|H_T}(u) = \int \mu_{T+1}(u) f_{U|H_T}(u) du,$$

dove, per il teorema di Bayes, la densità *a posteriori* è

$$f_{U|H_T}(u) = \frac{f_U(u) Pr(H_T|U = u)}{Pr(H_T)} = \frac{f_U(u) Pr(H_T|U = u)}{\int Pr(H_T|U = u) f_U(u) du}.$$

Premio collettivo $E(Y_{T+1}) = E[\mu_{T+1}(U)]$ valore atteso di $\mu_{T+1}(U)$ calcolato con la distribuzione *a priori*

$$\downarrow H_T$$

Premio bayesiano $E(Y_{T+1}|H_T) = E[\mu_{T+1}(U)|H_T]$ valore atteso di $\mu_{T+1}(U)$ calcolato con la distribuzione *a posteriori*

La valutazione del profilo di rischio dell'assicurato, modellato tramite il parametro $U$, è aggiornata tramite il meccanismo bayesiano

$$U \quad \rightarrow \quad U|H_T$$

$$F_U\ (f_U) \ \rightarrow \ F_{U|H_T}\ (f_{U|H_T})$$

ciò porta a modificare il premio.

Si noti che, considerati gli assicurati $i, j$, si ha $U_i =^d U_j$, ma, anche a parità di durata dell'osservazione, in generale, $U_i|H_{iT} \neq^d U_j|H_{jT}$.

Più in generale, si considera lo **stimatore bayesiano del premio individuale in $T+1$**

$$\omega \to (Y_1, \dots, Y_T)(\omega) \to \overbrace{E[\mu_{T+1}(U)|Y_1 = Y_1(\omega), \dots, Y_T = Y_T(\omega)]}^{\substack{\text{valore della funzione di regressione} \\ \text{di } \mu_{T+1}(U) \text{ su } Y_1,\dots,Y_T \\ \text{o valore atteso condizionato}}}$$

↗

$$\widetilde{\mu_{T+1}(U)} = E[\mu_{T+1}(U)|Y_1, \dots, Y_T]$$

↘

speranza matematica di $\mu_{T+1}(U)$
condizionata alla $\sigma$-algebra indotta da $Y_1, \dots, Y_T$

Nelle ipotesi del modello, si ha

$$\widetilde{\mu_{T+1}(U)} = E[\mu_{T+1}(U)|Y_1, \dots, Y_T] = E[Y_{T+1}|Y_1, \dots, Y_T].$$

(Lo si è visto nel caso particolare. In generale segue dalle proprietà della speranza matematica condizionata: se $\mathcal{K}$ è sotto $\sigma$ –algebra di $\mathcal{H}$, $E(Y|\mathcal{K}) = E[E(Y|\mathcal{H})|\mathcal{K}]$).

**Richiami.** Dati $X$ un numero aleatorio non osservabile e $Y_1, \dots, Y_T$ una sequenza di numeri aleatori osservabili, si pone il problema di "stimare $X$ a partire da $Y_1, \dots, Y_T$, commettendo un errore più piccolo possibile". Spesso come misura dell'errore si considera la **perdita quadratica attesa** e si cerca

$$\underset{g \in \mathcal{G}}{\operatorname{argmin}}\, E[(X - g(Y_1, \dots, Y_T))^2] \,.$$

Se $var(X) < +\infty$ e $\mathcal{G}$ è l'insieme delle funzioni a quadrato $P_{(Y_1,\dots,Y_T)}$-integrabile, il precedente problema ammette soluzione, unica a meno di insiemi trascurabili. La soluzione è la funzione di regressione di $X$ su $Y_1, \dots, Y_T$

$$g^*(y_1, \dots, y_T) = E[X | Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T].$$

Allora, lo stimatore di $X$ che consente di rendere minima la perdita quadratica attesa è

$$E[X | Y_1, \dots, Y_T],$$

che è anche detto **stimatore dei minimi quadrati.** ■

Nel nostro problema, il numero aleatorio non osservabile è il premio individuale $\mu_{T+1}(U)$ e i numeri osservabili sono $Y_1, \dots, Y_T$, la sequenza dei numeri aleatori del processo di interesse.

Allora, **lo stimatore bayesiano del premio individuale** $\widetilde{\mu_{T+1}(U)} = E[\mu_{T+1}(U)|Y_1, \dots, Y_T]$ è **la funzione del processo di osservazione che approssima al meglio il premio individuale** $\mu_{T+1}(U)$ **nel senso che rende minima la perdita quadratica attesa**.

Si noti che possiamo limitarci a tenere conto della storia di ciascun assicurato singolarmente, e non dell'esperienze del collettivo, per l'ipotesi di indipendenza stocastica dei processi relativi ai diversi assicurati.

## Modello Poisson-gamma per il processo dei numeri di sinistri

Consideriamo una collettività di rischi “analoghi”, omogenei rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed “indipendenti”. Nella collettività vi sia eterogeneità residua.

Per un fissato assicurato nella collettività, l'$i$-esimo, sia $N_{it}$ il numero di sinistri nell'anno $t$ e $U_i$ il parametro aleatorio di rischio. Assumiamo

a) $\{U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ processi iid al variare di $i$,

b) fissato $i$,

b1) $N_{i1}|U_i = u, N_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$,

b2) $N_{it}|U_i = u \sim P(\lambda u)$, per ogni $t$, $\lambda > 0$,

b3) $U_i \sim gamma(\alpha, \alpha)$.

Il processo $\{N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$, con le ipotesi b1), b2), b3), ha legge che dipende dai due parametri $\lambda, \alpha$, che coerentemente con l'ipotesi a), non dipendono da $i$. E' detto **processo Poisson-gamma ($\lambda, \alpha$)**.

Si ha

- $E(U_i) = 1$, $var(U_i) = 1/\alpha$
- $E(N_{it}|U_i = u) = \lambda u$, $E(N_{it}|U_i) = \lambda U_i$ **premio individuale**
- $E(N_{it}) = E\,[E(N_{it}|U_i)] = E(\lambda U_i) = \lambda$ **premio *a priori* o collettivo**
- $var(N_{it}) = E[var(N_{it}|U_i)] + var[E(N_{it}|U_i)] = E(\lambda U_i) + var(\lambda U_i) = \lambda + \alpha^{-1}\lambda^2$

Notiamo che, fissato $\lambda$, minore è $\alpha$, maggiore è la varianza di $U_i$, maggiore la dispersione del premio individuale: maggiore l'eterogeneità nell'ambito della collettività.

Il processo $\{N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ può essere visto come il processo degli incrementi annui di un processo mistura di poissoniani con misturante $gamma(\alpha, \alpha)$, allora sappiamo che

$$N_{it} \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha + \lambda}\right)$$

e che i numeri aleatori del processo non sono stocasticamente indipendenti.

Il processo Poisson-gamma è un **processo scambiabile**.

Per verificare la scambiabilità, fissiamo l'attenzione su un assicurato e, per semplicità di notazione, omettiamo l'indice.

Il processo $\{N_1, N_2, \dots\}$ è **scambiabile** se, per ogni $T > 0$, per ogni $\left(\pi(1), \dots, \pi(T)\right)$ permutazione di $(1, \dots, T)$, riesce $(N_1, \dots, N_T) =^d (N_{\pi(1)}, \dots, N_{\pi(T)}) \Leftrightarrow$ per ogni $(n_1, \dots, n_T)$,

$$Pr(N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T) = Pr(N_{\pi(1)} = n_1, \dots, N_{\pi(T)} = n_T).$$

Fissiamo $T$, $(n_1, \dots, n_T)$ e consideriamo

$$Pr(N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T) = \int_0^{+\infty} Pr(N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T | U = u) f_U(u) du$$

$$= \int_0^{+\infty} \underbrace{\prod_{t=1}^{T} Pr(N_t = n_t | U = u)} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} du$$

$\uparrow$ $\qquad\qquad\qquad$ $\uparrow$

indipendenza condizionata $\qquad$ $\prod_{t=1}^{T} e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^{n_t}}{n_t!} = e^{-\lambda u T} \frac{(\lambda u)^{\sum_{t=1}^{T} n_t}}{\prod_{t=1}^{T} n_t!}$

$$Pr(N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda u T} \frac{(\lambda u)^{\sum_{t=1}^{T} n_t}}{\prod_{t=1}^{T} n_t!} \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} du$$

$$= \frac{\alpha^\alpha \lambda^{\sum_{t=1}^{T} n_t}}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^{T} n_t!} \int_0^{+\infty} \underbrace{u^{\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_t - 1} e^{-(\alpha+\lambda T) u}} du$$

$\uparrow$

nucleo della $gamma(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t , \alpha + \lambda T)$

$$= \frac{\alpha^\alpha \lambda^{\sum_{t=1}^{T} n_t}}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^{T} n_t\,!} \left[ \frac{(\alpha + \lambda T)^{\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_t}}{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t)} \right]^{-1}$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t)}{\Gamma(\alpha) \prod_{t=1}^{T} n_t\,!} \left( \frac{\alpha}{\alpha + \lambda T} \right)^{\alpha} \left( \frac{\lambda}{\alpha + \lambda T} \right)^{\sum_{t=1}^{T} n_t}$$

Nei precedenti passaggi, sostituendo $(N_1, \dots, N_T)$ con $(N_{\pi(1)}, \dots, N_{\pi(T)})$ si arriva al medesimo risultato.

**Processo Poisson-gamma, aggiornamento bayesiano**,

Ancora per il fissato assicurato, determiniamo il premio *a posteriori* in $T+1$, supponendo di avere osservato $H_T = (N_1 = n_1, \dots, N_T = n_T)$.

Ricordiamo che

- il premio *a priori* è $E(N_{T+1}) = \lambda$,
- il premio individuale è $E(N_{T+1}|U) = \mu_{T+1}(U) = \lambda U$,
- il premio *a posteriori* è

$$E(N_{T+1}|H_T) = E(\mu_{T+1}(U)|H_T) = E(\lambda U|H_T) = \lambda E(U|H_T),$$

La densità *a posteriori* del parametro di rischio è

$$f_{U|H_T}(u) = \frac{f_U(u)Pr(H_T|U=u)}{Pr(H_T)} \propto f_U(u)Pr(H_T|U=u)$$

$$= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)} u^{\alpha-1} e^{-\alpha} \; e^{-\lambda u T} \frac{(\lambda u)^{\sum_{t=1}^T n_t}}{\prod_{t=1}^T n_t!} \propto u^{\alpha-1} e^{-\alpha u} e^{-\lambda u T} u^{\sum_{t=1}^T n_t} = u^{\alpha + \sum_{t=1}^T n_t - 1} e^{-(\alpha+\lambda T)u}$$

Pertanto, $\quad f_{U|H_T} \sim gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t \, , \alpha + \lambda T)$

Si ha che la distribuzione *a posteriori* è ancora una gamma, ma con parametri aggiornati:

$$U \sim gamma(\alpha, \alpha) \qquad U|H_T \sim gamma(\alpha + \textstyle\sum_{t=1}^{T} n_t, \alpha + \lambda T)$$

con

$$E(U|H_T) = \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T}.$$

Il premio *a posteriori* o bayesiano in $T+1$ è

$$E(N_{T+1}|H_T) = \lambda E(U|H_T) = \lambda \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T}.$$

Notiamo che dipende dalla valutazione *a priori* tramite i parametri $\lambda, \alpha$ e dalla storia individuale di sinistrosità tramite $T$, $\sum_{t=1}^{T} n_t$.

Riesce

$$E(N_{T+1}|H_T) = \lambda \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T}$$
$$= \lambda \frac{\alpha}{\alpha + \lambda T} + \frac{\sum_{t=1}^{T} n_t}{T} \frac{\lambda T}{\alpha + \lambda T}.$$

Il premio *a posteriori* è mistura di

$$\lambda = E(N_{T+1}) \qquad\qquad \frac{\sum_{t=1}^{T} n_t}{T}$$

premio *a priori* — numero medio annuo di sinistri osservati, sintesi della storia di sinistrosità

I pesi della mistura sono

$$1 - z_T = \frac{\alpha}{\alpha + \lambda T} \qquad\qquad z_T = \frac{\lambda T}{\alpha + \lambda T}$$

Si noti che,

- fissati $\lambda, \alpha$, $z_T$ è crescente al crescere di $T$ e $z_T \to 1$, per $T \to +\infty$,
- fissati $\lambda, T$, $z_T$ è decrescente al crescere di $\alpha$: minore è l'eterogeneità residua, minore il peso attribuito alla storia individuale di sinistrosità, maggiore è l'eterogeneità residua, maggiore il peso attribuito alla storia individuale di sinistrosità.

Nel premio *a posteriori*,

$$E(N_{T+1}|H_T) = \lambda \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T},$$

il fattore

$$c_{T+1}(H_T) = \frac{\alpha + \sum_{t=1}^{T} n_t}{\alpha + \lambda T} = \frac{E(N_{T+1}|H_T)}{E(N_{T+1})}$$

è detto **coefficiente di aggiornamento o di revisione bayesiana**: è il fattore che moltiplicato per il premio *a priori* fornisce il premio *a posteriori*. E' anche detto **coefficiente bonus-malus bayesiano**.

**Osservazioni.**

- Si ha $$c_{T+1}(H_T) > 1 \iff \sum_{t=1}^{T} n_t > \underset{\substack{\uparrow \\ E(N_1 + \cdots + N_T)}}{\lambda T}$$
- La storia di sinistrosità interviene con la sintesi $\sum_{t=1}^{T} n_t$.
- Assicurati diversi con lo stesso $T$ e con la stessa storia di sinistrosità, anzi, con lo stesso numero totale osservato di sinistri, avranno lo stesso premio a posteriori, altrimenti no.

**Esempio.** In classe tariffaria 1 si abbia $\lambda = 0.06$, $\alpha = 0.5$

| Coefficienti di revisione bayesiana | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Numeri di sinistri | | | | | | |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0.89 | 2.68 | 4.46 | 6.25 | 8.04 | 9.82 | 11.61 |
| 5 | 0.63 | 1.88 | 3.13 | 4.38 | 5.63 | 6.88 | 8.13 |
| 10 | 0.45 | 1.36 | 2.27 | 3.18 | 4.09 | 5.00 | 5.91 |
| 15 | 0.36 | 1.07 | 1.79 | 2.50 | 3.21 | 3.93 | 4.64 |

In classe tariffaria 2 si abbia $\lambda = 0.10$, $\alpha = 0.5$

| Coefficienti di revisione bayesiana | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Numeri di sinistri | | | | | | |
| T | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 1 | 0.83 | 2.50 | 4.17 | 5.83 | 7.50 | 9.17 | 10.83 |
| 5 | 0.50 | 1.50 | 2.50 | 3.50 | 4.50 | 5.50 | 6.50 |
| 10 | 0.33 | 1.00 | 1.67 | 2.33 | 3.00 | 3.67 | 4.33 |
| 15 | 0.25 | 0.75 | 1.25 | 1.75 | 2.25 | 2.75 | 3.25 |

I coefficienti di revisione della classe tariffaria 1 sono sempre più elevati di quelli della classe 2:

- se due rischi non provocano sinistri, il rischio in classe 1 ottiene una riduzione di premio inferiore del rischio in classe 2,
- se entrambi i rischi provocano lo stesso numero di sinistri il rischio in classe 1 riceve una penalizzazione maggiore del rischio in classe 2. ■

Possiamo ottenere la distribuzione *a posteriori* di $N_{T+1}|H_T$:

$$Pr(N_{T+1} = n|H_T) = \int_0^{+\infty} Pr(N_{T+1} = n|H_T, U = u) f_{U|H_T}(u)du$$

$$= \int_0^{+\infty} Pr(N_{T+1} = n|U = u) f_{U|H_T}(u)du$$

$\uparrow$ indipendenza condizionata

$\uparrow$ $e^{-\lambda u} \frac{(\lambda u)^n}{n!}$

$\uparrow$ $\frac{(\alpha+\lambda T)^{\alpha+\sum_{t=1}^T n_t}}{\Gamma(\alpha+\sum_{t=1}^T n_t)} u^{\alpha+\sum_{t=1}^T n_t - 1} e^{-(\alpha+\lambda T)u}$

$$= \frac{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t + n)}{\Gamma(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t) n!} \left(\frac{\alpha + \lambda T}{\alpha + \lambda(T+1)}\right)^{\alpha+\sum_{t=1}^T n_t} \left(\frac{\lambda}{\alpha + \lambda(T+1)}\right)^n$$

Si ha

$$N_{T+1} \sim BN\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+\lambda}\right) \qquad N_{T+1}|H_T \sim BN\left(\alpha + \sum_{t=1}^T n_t, \frac{\alpha+\lambda T}{\alpha+\lambda(T+1)}\right)$$

## Modello Poisson-gamma, stima dei parametri

Per calcolare il premio *a posteriori* per un individuo della collettività si devono conoscere i valori dei parametri $\alpha, \lambda$, legati alla valutazione *a priori*, e la storia di sinistrosità.

Nell'approccio bayesiano, se $\alpha, \lambda$ non sono noti, dovrebbero essere trattati come numeri aleatori, assegnando una distribuzione di probabilità e le ipotesi del modello dovrebbero essere intese come condizionate ai valori dei due parametri.

Nell'**approccio bayesiano "empirico"**, i parametri $\alpha, \lambda$ sono considerati certi, ma non noti, e sono stimati dai dati.

Supponiamo di disporre dei dati per $r$ assicurati della collettività, osservati ciascuno per $T$ anni.

Per l'assicurato *i*-esimo, siano $N_{it}$ il numero aleatorio di sinistri nell'anno $t$, $U_i$ il parametro aleatorio di rischio, $n_{it}$ valore osservato di $N_{it}$.

Per i processi dei diversi assicurati si assumono le ipotesi a), b).

Consideriamo la verosimiglianza dell'osservazione,

$$L(\lambda,\alpha;\boldsymbol{n}) = \prod_{i=1}^{r} Pr(\,N_{i1} = n_{i1},\ldots,N_{iT} = n_{iT};\lambda,\alpha)$$

$$= \prod_{i=1}^{r} \frac{\Gamma(\alpha+\sum_{t=1}^{T} n_{it})}{\Gamma(\alpha)\prod_{t=1}^{T} n_{it}!}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\lambda T}\right)^{\alpha}\left(\frac{\lambda}{\alpha+\lambda T}\right)^{\sum_{t=1}^{T} n_{it}}$$

Posto $n_i = \sum_{t=1}^{T} n_{it}$, $n = \sum_{i=1}^{r} n_i$ e considerata la log-verosimoglianza, si ha

$$l(\lambda,\alpha;\boldsymbol{n}) = \log L(\lambda,\alpha;\boldsymbol{n})$$

$$= \sum_{i=1}^{r}\left[\log\frac{\Gamma(\alpha+n_i)}{\Gamma(\alpha)} - \log\left(\prod_{t=1}^{T} n_{i,t}\,!\right) + \alpha(\log\alpha - \log(\alpha+\lambda T)) + n_i(\log\lambda - \log(\alpha+\lambda T))\right]$$

$$\equiv \sum_{i=1}^{r}\left[\sum_{j=0}^{n_i-1}\log(\,\alpha+j) + \alpha(\log\alpha - \log(\alpha+\lambda T)) + n_i(\log\lambda - \log(\alpha+\lambda T))\right]$$

Il sistema delle equazioni di log-verosimiglianza è

$$\begin{cases} \dfrac{\partial l(\lambda, \alpha; \boldsymbol{n})}{\partial \lambda} = 0 \\ \dfrac{\partial l(\lambda, \alpha; \boldsymbol{n})}{\partial \alpha} = 0 \end{cases}$$

Consideriamo, in particolare, la prima equazione

$$\frac{\partial l(\lambda,\alpha;\boldsymbol{n})}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^{r} \left[ -\alpha \frac{1}{\alpha+\lambda T} T + n_i \left( \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\alpha+\lambda T} T \right) \right]$$

$$= -\frac{\alpha T}{\alpha + \lambda T} r + \frac{n}{\lambda} - \frac{T}{\alpha + \lambda T} n = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\hat{\lambda} = \frac{n}{rT}$$

La stima di $\lambda = E(N_{it})$ è la frequenza sinistri.

Notiamo che il parametro $\alpha$ deve essere positivo: affinché la stima sia positiva, ci deve essere sufficiente “sovradispersione” nei dati.

**Osservazione.** Nel modello Poisson-gamma, si ottiene facilmente la distribuzione *a posteriori* per il parametro di rischio e dunque si determina facilmente il premio *a posteriori*.

Ciò dipende dal fatto che, in tale modello, le distribuzioni di $U_i$ e di $N_{it}|U_i = u$, si “combinano” in modo tale che la distribuzione di $U_i|H_{iT}$ è della stessa famiglia della distribuzione di $U_i$, ma con parametri aggiornati: la famiglia gamma è **coniugata naturale** della Poisson.

In generale, ciò non accade e può essere molto complicato o impossibile determinare la distribuzione a posteriori, se non ricorrendo a tecniche di tipo simulativo.

Alcuni problemi dell’approccio bayesiano

- si devono specificare le distribuzioni di $\{Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots\}$, per ogni $u$, e la distribuzione di $U_i$,
- può accadere chi il premio bayesiano sia difficile da calcolare,
- il premio bayesiano può essere difficile da spiegare agli assicurati.

## APPROCCIO DELLA TEORIA DELLA CREDIBILITÀ ALLA PERSONALIZZAZIONE BASATA SULL'ESPERIENZA

Consideriamo una collettività di rischi "analoghi", omogenei rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed "indipendenti". Nella collettività vi sia eterogeneità residua.

Sia $P_{T+1}$ il premio *a priori* (o collettivo) per l'anno $T+1$.

Supponiamo che l'assicurato *i*-esimo della classe sia stato osservato nei precedenti $T$ anni. Siano $y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{iT}$ i valori osservati delle variabili di interesse e $\bar{y}_{iT} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}$ la media: un riassunto della storia di sinistrosità dell'assicurato.

Il premio nell'anno $T+1$ può essere posto pari a

- $P_{T+1}$, si tiene conto solo dei dati relativi alla collettività,
- $\bar{y}_{iT}$, si tiene conto solo dell'esperienza di sinistrosità del particolare assicurato,
- un compromesso tra le due precedenti posizioni estreme.

Una tipica **formula di credibilità** è

$$P_{i,T+1}^{cred}(H_{iT}) = (1 - z_{iT})P_{T+1} + z_{iT}\bar{y}_{iT}$$

dove

- $P_{i,T+1}^{cred}(H_{iT})$ indica il **premio di credibilità** per il dato assicurato, nell'anno $T+1$, vista la storia di sinistrosità $H_{iT} = (Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$,
- $0 \leq z_{iT} \leq 1$ è detto **fattore** o **coefficiente di credibilità**.

Il premio è una **media ponderata** di $P_{T+1}$, e $\bar{y}_{iT}$. Il coefficiente di credibilità assegna un "peso" alla sintesi della storia di sinistrosità dell'assicurato.

Si noti che fissando il premio uguale a

- $P_{T+1}$, il premio potrebbe essere troppo elevato per i rischi virtuosi,
- $\bar{y}_{iT}$, se $\bar{y}_{iT} = 0$ il premio è nullo; a causa dei pochi dati, $\bar{y}_{iT}$ potrebbe essere una stima non affidabile del risarcimento atteso; non si introduce effetto di solidarietà.

Ragionevolmente, $0 < z_{i1} < z_{i2} < \ldots \leq 1$: più è lungo il periodo di osservazione, maggiore è il peso assegnato alla sintesi dell'esperienza individuale. Se $z_{iT} = 1$, si parla di **piena credibilità**.

La valutazione di $z_{iT}$ è determinante per applicare la formula.

Le formule di credibilità sono state introdotte in modo intuitivo e sono state proposte formule empiriche per ottenere $z_{iT}$. Tuttavia, le formule di credibilità possono essere giustificate in un solido quadro metodologico: la Teoria della Credibilità Bayesiana.

**Osservazione.** L'approccio della Teoria della Credibilità può anche essere utilizzato per valutare i premi (*a priori*) quando i dati dell'assicuratore per un dato portafoglio siano inadeguati (ad es. poco numerosi, per una copertura assicurativa emessa da poco). Può allora essere ragionevole, ai fini di ottenere la tariffa, combinare i dati del portafoglio con **dati collaterali** (ad es. dati di portafogli con rischi simili o dati di mercato). Il premio di credibilità è una media ponderata di un premio basato su dati collaterali e di un premio basato sui dati di portafoglio.

**Credibilità bayesiana**

Riprendiamo il quadro dell'approccio bayesiano.

Per un fissato assicurato, indicato con $i$, in una classe di rischi "analoghi", omogenei rispetto a caratteristiche osservabili *a priori*, ed "indipendenti", sia $Y_{it}$ un numero aleatorio di interesse nell'anno $t$ e $U_i$ il parametro di rischio o componente di eterogeneità.

Introduciamo le seguenti ipotesi:

- i processi $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$, $i = 1,2, \dots$, siano stocasticamente indipendenti, informazioni sulla storia di sinistrosità degli altri assicurati non portino a modificare la valutazione probabilistica del processo per l'assicurato *i*-esimo,
- fissato $i$, $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ siano stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$.

Al fine di ottenere uno stimatore per il premio individuale in $T+1$,

$$\mu_{i,T+1}(U_i) = E\left(Y_{i,T+1} \middle| U_i\right),$$

invece dello stimatore del premio bayesiano $E\left(Y_{i,T+1} \middle| Y_{i1}, \dots, Y_{iT}\right) = E\left(\mu_{i,T+1}(U_i) \middle| Y_{i1}, \dots, Y_{iT}\right)$, consideriamo una funzione più semplice del processo di osservazione: un polinomio (non omogeneo) di primo grado (funzione lineare affine)

$$\alpha_{i0} + \alpha_{i1} Y_{i1} + \cdots + \alpha_{iT} Y_{iT}.$$

Si devono determinare, con qualche criterio, i coefficienti. Come criterio scegliamo di minimizzare **la perdita quadratica attesa**

$$Q_i(\alpha_{i0}, \alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iT}) = E\left[\left(\mu_{i,T+1}(U_i) - \alpha_{i0} - \sum_{i=1}^{T} \alpha_{it} Y_{it}\right)^2\right].$$

Come nell'approccio bayesiano, possiamo limitarci a tenere conto della storia di ciascun assicurato singolarmente e non dell'esperienze del collettivo, per l'ipotesi di indipendenza stocastica dei processi relativi ai diversi assicurati.

Per determinare la soluzione, semplifichiamo la notazione omettendo l'indice $i$. Per la funzione

$$Q(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = E[(\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t)^2]$$

$$= \int (\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t y_t)^2 \, dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1, \dots, y_T) \; ,$$

consideriamo le condizioni del primo ordine,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Q(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{T})}{\partial \alpha_0} = 0 \\ \dfrac{\partial Q(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{T})}{\partial \alpha_h} = 0, \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

Supponiamo che siano soddisfatte le condizioni che consentono di effettuare la derivazione sotto il segno di integrale.

Si ha

$$\frac{\partial Q(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_T)}{\partial \alpha_0} = \int 2\left(\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t y_t\right)(-1)\, dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1, \dots, y_T)$$

e

$$\frac{\partial Q(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_T)}{\partial \alpha_0} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E\left[2\left(\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t\right)(-1)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E\big(\mu_{T+1}(U)\big) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_t)$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_t) \qquad (*)$$

L’ultima relazione segue dalla

$$E\big(\mu_{T+1}(U)\big) = E[E(Y_{T+1}|U)] = E(Y_{T+1}).$$

Per $h = 1, \dots, T$,

$$\frac{\partial Q(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_T)}{\partial \alpha_h} = \int 2\left(\mu_{T+1}(u) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t y_t\right)(-y_h)\, dF_{U,Y_1,\dots,Y_T}(u, y_1, \dots, y_T)$$

$$\frac{\partial Q(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_T)}{\partial \alpha_h} = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E\left[2\left(\mu_{T+1}(U) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t\right)(-Y_h)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$E[\mu_{T+1}(U) Y_h] = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_h Y_t)\ .$$

Si ha

$$E[\mu_{T+1}(U) Y_h] = E[E(\mu_{T+1}(U) Y_h | U)] = E[\mu_{T+1}(U) E(Y_h | U)]$$

$$= E[E(Y_{T+1}|U) E(Y_h|U)] = E[E(Y_{T+1} Y_h | U)]$$

↑ indipendenza condizionata

$$= E(Y_{T+1} Y_h)$$

Pertanto,

$$\frac{\partial Q(\alpha_0,\alpha_1,\dots,\alpha_T)}{\partial \alpha_h} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad E(Y_{T+1} Y_h) = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_h Y_t).$$

Il sistema delle condizioni del primo ordine

$$\begin{cases} E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_t) \\ E(Y_h Y_{T+1}) = \alpha_0 E(Y_h) + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_h Y_t), \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} E(Y_{T+1}) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_t) \\ cov(Y_h, Y_{T+1}) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t cov(Y_h, Y_t), \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

Sistema lineare di $T + 1$ equazioni in $T + 1$ incognite, detto **sistema normale**. Ammette una e una sola soluzione se la matrice varianze-covarianze le vettore di componenti $Y_h$, $var(\boldsymbol{Y})$, è invertibile. Si prova che la soluzione è punto di minimo di $Q$.

Risolvendo il sistema normale, si trova il punto di minimo di $Q$: $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_T^*)$.

Lo stimatore

$$\widetilde{\mu_{T+1}(U)}^{cred} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t$$

è detto **stimatore di credibilità lineare** (non omogeneo) **del premio individuale in $\boldsymbol{T+1}$**.

Vista la storia di sinistrosità $H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$, **il premio di credibilità in $\boldsymbol{T+1}$** è

$$P_{T+1}^{cred}(H_T) = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* y_t.$$

**Osservazioni.**

- Poiché $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_T^*)$ è soluzione del sistema normale, dipende solo dai primi due momenti (che si suppone esistano finiti) dei numeri aleatori del processo di osservazione: rispetto all'approccio bayesiano, in questo approccio, non serve specificare completamente le distribuzioni.

- Dalla (*)

$$E(\alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_t) = E(Y_{T+1}) = E(\mu_{T+1}(U)).$$

- Se si considerano le seguenti due funzioni

$$Q_1(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = E[(E(Y_{T+1}|Y_1, \dots Y_T) - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t)^2],$$
$$Q_2(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_T) = E[(Y_{T+1} - \alpha_0 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t)^2],$$

  si trova che $(\alpha_0^*, \alpha_1^*, \dots, \alpha_T^*)$, soluzione del sistema normale, è anche il punto di minimo di $Q_1$ e di $Q_2$: lo stimatore del premio di credibilità è anche il migliore stimatore, nel senso della funzione di perdita quadratica attesa, di $E(Y_{T+1}|Y_1, \dots Y_T)$ e di $Y_{T+1}$.

Abbiamo considerato un fissato individuo, riprendendo la notazione con l'indice dell'individuo, il sistema normale è

$$\begin{cases} E\left(Y_{i,T+1}\right) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_{it}) \\ cov(Y_{ih}, Y_{i,T+1}) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t cov(Y_{ih}, Y_{it}), \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

La soluzione, in generale, dipende da $i$, $(\alpha_{i0}^*, \alpha_{i1}^*, \dots, \alpha_{iT}^*)$. Lo stimatore di credibilità del premio in $T+1$ è

$$\mu_{\iota,\widetilde{T+1}(U_\iota)}^{cred} = \alpha_{i0}^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_{it}^* Y_{it}.$$

Se la condizione di analogia tra gli assicurati consente di accogliere l'ipotesi di uguale distribuzione dei processi $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ al variare di $i$, o di uguaglianza dei primi due momenti, allora, a parità di $T$, la soluzione del sistema normale non dipende da $i$.

**Modello di credibilità di Bühlmann**

Si assume che

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ processi iid al variare di $i$,
- fissato $i$, $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti e identicamente distribuiti per ogni $u$ determinazione di $U_i$, con momento primo e secondo finiti.

Poniamo

$$\mu(u) = E(Y_{it}|U_i = u), \qquad v(u) = var(Y_{it}|U_i = u),$$

e

$$\mu = E[\mu(U_i)] = E[E(Y_{it}|U_i)] = E(Y_{it}),$$
$$v = E[v(U_i)] = E[var(Y_{it}|U_i)],$$
$$a = var[\mu(U_i)] = var[E(Y_{it}|U_i)].$$

Notiamo che $\mu(U_i)$ è il premio individuale nell'anno $t$, per ogni $t$.

Il parametro $\mu$ è il premio collettivo nell'anno $t$, per ogni $t$.

Gli altri due parametri intervengono nella varianza di $Y_{it}$,

$$var(Y_{it}) = E[var(Y_{it}|U_i)] + var[E(Y_{it}|U_i)] = v + a.$$

In un portafoglio piuttosto omogeneo, c'è poca dispersione del premio individuale, $a = var[\mu(U_i)]$ è "piccola", viceversa se vi è notevole eterogeneità residua, $a$ è "grande". La componente $a$ nella scomposizione della varianza tiene conto della parte di "variabilità" dovuta all'eterogeneità residua.

I tre parametri $\mu, v, a$, che non dipendono da $i$, sono detti **parametri di struttura del modello** e da tali parametri dipende il sistema normale. Si ha infatti

- $E(Y_{it}) = \mu$,
- $var(Y_{it}) = v + a$,
- per $h \neq t$ , $cov(Y_{ih}, Y_{it}) = E(Y_{ih}Y_{it}) - E(Y_{ih})E(Y_{it})$

$$= E[E(Y_{ih}Y_{it}|U_i)] - E(Y_{it})^2$$

$$= E[E(Y_{ih}|U_i)E(Y_{it}|U_i)] - (E[E(Y_{it}|U_i)])^2$$

↑ per l'indipendenza condizionata

$$= E[\mu(U_i)^2] - (E[\mu(U_i)])^2 = var\big(\mu(U_i)\big) = a.$$

Il sistema normale

$$\begin{cases} E\left(Y_{i,T+1}\right) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_{it}) \\ cov(Y_{ih}, Y_{i,T+1}) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t cov(Y_{ih}, Y_{it})\,, \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \alpha_0 + \mu \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \\ a = \alpha_h (v + a) + \sum_{\substack{t=1 \\ t\neq h}}^{T} \alpha_t a\,, \quad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ a = \alpha_h v + a \sum_{t=1}^{T} \alpha_t\,, \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

Posto $k = v/a$,

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ 1 = \alpha_h k + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t\,, \quad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ \alpha_h k = 1 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t\,, \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu k}, \qquad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T \frac{\alpha_0}{\mu k} = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_h = \frac{\alpha_0}{\mu k}, \qquad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

L'ultimo passaggio è ottenuto sommando membro a membro le equazioni del secondo gruppo e sostituendo nella prima equazione. La soluzione del sistema, che non dipende da $i$, è

$$\alpha_0^* = \mu \frac{k}{T+k}, \qquad \alpha_t^* = \frac{1}{T+k},\ t = 1, \dots, T.$$

Lo **stimatore di credibilità lineare del premio individuale in $\boldsymbol{T+1}$** è

$$\widetilde{\mu_{\iota,T+1}(U_\iota)}^{cred} = \alpha_0^* + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t^* Y_{it} = \mu \frac{k}{T+k} + \frac{1}{T+k} \sum_{t=1}^{T} Y_{it}$$

$$= (1 - z_T)\mu + z_T \bar{Y}_{iT}$$

dove

- $z_T = \frac{T}{T+k}$, con $k = \frac{v}{a}$,
- $\bar{Y}_{iT} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} Y_{it}$, media dei valori della grandezza di interesse.

Vista la storia di sinistrosità $H_{iT} = (Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$, **il premio di credibilità in $\boldsymbol{T+1}$** è

$$P_{i,T+1}^{cred}(H_{iT}) = (1 - z_T)\mu + z_T \frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T},$$

media ponderata del premio a priori (collettivo) $\mu$ e del valor medio osservato della grandezza di interesse $\frac{\sum_{t=1}^{T} y_{it}}{T}$ (es. numero medio annuo di sinistri, risarcimento medio annuo), con peso o coefficiente di credibilità $z_T$.

Il coefficiente di credibilità $z_T = \frac{T}{T+k}$, dipende da $T, k$

- fissato $k$, $z_T$ è crescente al crescere di $T$ e per $T \to +\infty$, $z_T \to 1$: piena credibilità,
- fissato $T$, $z_T$ è decrescente al crescere di $k$.

  Fissata $var(Y_{it}) = v + a$, se c'è "poca" eterogeneità residua, il premio individuale $E(Y_{it}|U_i) = \mu(U_i)$ ha poca variabilità, $a$ è "piccolo" relativamente a $v$ e $k = v/a$ è "grande" e dunque $z_T$ è "piccolo"; viceversa, se c'è "molta" eterogeneità residua $z_T$ è "grande".

  In linea con l'intuizione, in una collettività omogenea il premio collettivo è una stima adeguata del premio individuale; ciò non accade in una collettività eterogenea, in tale caso può essere più utile tenere conto dell'osservazione della storia individuale di sinistrosità per ottenere una migliore valutazione del premio.

**Nota.** I coefficienti $\alpha_t^* = \frac{1}{T+k}$ dello stimatore del premio di credibilità, per $t = 1, \dots, T$, non dipendono da $t$. Segue dalla scambiabilità del processo $\{Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$, in forza della quale

$$E\left[\left(Y_{i,T+1} - \alpha_{i0} - \sum_{i=1}^{T} \alpha_{it} Y_{it}\right)^2\right] = E\left[\left(Y_{i,T+1} - \alpha_{i0} - \sum_{i=1}^{T} \alpha_{it} Y_{i\pi(t)}\right)^2\right],$$

con $(\pi(1), \dots, \pi(T))$ una qualunque permutazione di $(1, \dots, T)$.

## Modello di Bühlmann, stima dei parametri

Il premio di credibilità dipende dai parametri di struttura. Nella credibilità bayesiana empirica, tali parametri sono stimati dai dati, tramite stimatori non distorti (stime non parametriche).

Supponiamo di disporre dei dati per $r$ assicurati della collettività, osservati ciascuno per $T$ anni. Per l'assicurato *i*-esimo, siano $Y_{it}$ la grandezza aleatoria di interesse nell'anno $t$, $U_i$ il parametro aleatorio di rischio, $y_{it}$ valore osservato di $Y_{it}$.

Per i processi dei diversi assicurati si assumono le ipotesi del modello, con parametri di struttura $\mu, v, a$.

Stimatore per $\mu$. Consideriamo le medie campionarie per rischio

$$\bar{Y}_{iT} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it} = \tilde{\mu}_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

e la loro media aritmetica

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \tilde{\mu}_i.$$

$\tilde{\mu}$ è stimatore non distorto per $\mu$.

La stima di $\mu$ è

$$\hat{\mu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\mu}_i = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} y_{it}\right).$$

Stimatore per $v$. Consideriamo le varianze campionarie per rischio

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(Y_{it} - \tilde{\mu}_i)^2, \quad i = 1, \dots, r,$$

e la loro media aritmetica

$$\tilde{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^2.$$

$\tilde{v}$ è stimatore non distorto per $v$. Infatti, poiché $Y_{i1}|U_i = u, \dots, Y_{iT}|U_i = u$ sono iid con comune varianza $var(Y_{it}|U_i = u) = v(u)$, si ha

$$E\left[\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(Y_{it} - \tilde{\mu}_i)^2 \, |U_i = u\right] = E\left(\tilde{\sigma}_i^2|U_i = u\right) = v(u), \text{ per ogni } u.$$

Segue

$$E\left(\tilde{\sigma}_i^2\right) = E\left[E\left(\tilde{\sigma}_i^2|U_i\right)\right] = E\left(v(U_i)\right) = v$$

e

$$E(\tilde{v}) = E\left(\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^2\right) = v.$$

La stima di $v$ è

$$\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(y_{it} - \hat{\mu}_i)^2\right).$$

Stimatore per $a$. Consideriamo la varianza campionaria delle medie per rischio $\tilde{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} Y_{it}$

$$\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2$$

e calcoliamo il valore atteso. I numeri aleatori $\tilde{\mu}_1, \dots, \tilde{\mu}_r$ sono iid. Infatti,

- $\tilde{\mu}_i$ è media aritmetica di $Y_{i1}, \dots, Y_{iT}$,
- $(Y_{11}, \dots, Y_{1T}), \dots, (Y_{r1}, \dots, Y_{rT})$ sono iid.

$\Rightarrow$ $\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2$ è stimatore non distorto della comune varianza dei $\tilde{\mu}_i$

Si ha

$$var(\tilde{\mu}_i) = E[var(\tilde{\mu}_i|U_i)] + var[E(\tilde{\mu}_i|U_i)]$$

$$= E\left[\frac{1}{T^2}\sum_{t=1}^{T} var(Y_{it}|U_i)\right] + var\left[\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} E(Y_{it}|U_i)\right]$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$

indipendenza condizionata $v(U_i)$ $\mu(U_i)$

$$= \frac{1}{T} E[v(U_i)] + var[\mu(U_i)]$$

$$= \frac{1}{T} v + a$$

Pertanto,

$$E\left(\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\mu}_i-\tilde{\mu})^2\right)=\frac{1}{T}v+a.$$

Allora uno stimatore non distorto per $a$ è

$$\tilde{a}=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\tilde{\mu}_i-\tilde{\mu})^2-\frac{1}{T}\tilde{v}.$$

La stima di $a$ è

$$\hat{a}=\frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\hat{\mu}_i-\hat{\mu})^2-\frac{1}{T}\hat{v}.$$

Notiamo che, in una collettività non omogenea, il parametro $a$ è positivo. Tale dovrà risultare la stima.

**Esempio.** $Y_{it} = N_{it}$ numero annuo di sinistri, $r = 20, T = 10$.

| $i\backslash t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | $\hat{\mu}_i$ | $\hat{\sigma}_i^2$ | Premio |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0.30** | **0.233** | **0.222** |
| **2** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **3** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.10** | **0.100** | **0.109** |
| **4** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **5** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **6** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.10** | **0.100** | **0.109** |
| **7** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.10** | **0.100** | **0.109** |
| **8** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **9** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0.20** | **0.178** | **0.165** |
| **10** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **11** | **1** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0.40** | **0.267** | **0.278** |
| **12** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0.20** | **0.178** | **0.165** |
| **13** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0.10** | **0.100** | **0.109** |
| **14** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **0** | **0.20** | **0.178** | **0.165** |
| **15** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **16** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **17** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0.20** | **0.178** | **0.165** |
| **18** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |
| **19** | **1** | **0** | **1** | **0** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0** | **1** | **0.50** | **0.278** | **0.334** |
| **20** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0** | **0.00** | **0.000** | **0.052** |

$\hat{\mu}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} n_{it}$, $\hat{\mu} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\mu}_i = 0.12$, $\hat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}(n_{it} - \hat{\mu}_i)^2$, $\hat{v} = \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r} \hat{\sigma}_i^2 = 0.094444$,

$\hat{a} = \frac{1}{r-1}\sum_{i=1}^{r}(\hat{\mu}_i - \hat{\mu})^2 - \frac{1}{T}\hat{v} = 0.012240$, $\hat{k} = \hat{v}/\hat{a} = 7.716197$,

$z_T = \frac{T}{T+k} = 0.564455$, $1 - z_T = 0.435545$, $P_{i,T+1}^{cred}(H_{iT}) = (1 - z_T)\hat{\mu} + z_T\hat{\mu}_i$

**Esempio. Modello Poisson-mistura semiparametrico per i numeri di sinistri**

Per l'assicurato $i$-esimo, siano $N_{it}$ il numero di sinistri nell'anno $t$ e $U_i$ il parametro aleatorio di rischio. Assumiamo

- $\{U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ processi iid al variare di $i$,
- fissato $i$,

  $N_{i1}|U_i = u, N_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$,

  $N_{it}|U_i = u \sim P(\lambda u)$, per ogni $t$, $\lambda > 0$,

  $U_i$ tale che $E(U_i) = 1$, $var(U_i) = \sigma^2$.

Sono soddisfatte le ipotesi del modello di Bühlmann, in aggiunta è specificata la distribuzione condizionata. Si ha

$$\mu(u) = E(N_{it}|U_i = u) = \lambda u, \qquad v(u) = var(N_{it}|U_i = u) = \lambda u.$$

I parametri di struttura sono

$$\mu = E(N_{it}) = E[E(N_{it}|U_i)] = E(\lambda U_i) = \lambda E(U_i) = \lambda,$$
$$v = E[var(N_{it}|U_i)] = E(\lambda U_i) = \lambda,$$
$$a = var[E(N_{it}|U_i)] = var(\lambda U_i) = \lambda^2 var(U_i) = \lambda^2 \sigma^2.$$

Si può ottenere lo stimatore di credibilità del premio per la frequenza in $T + 1$,

$$\mu_{\iota,\widetilde{T+1}(U_\iota)}^{cred} = (1 - z_T)\mu + z_T \frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T} N_{it},$$

dove $z_T = \frac{T}{T+k}$, con $k = \frac{v}{a}$.

## Modello di credibilità di Bühlmann-Straub

Nel modello di Bühlmann i numeri aleatori del processo di interesse sono giudicati identicamente distribuiti. In molti casi tale ipotesi non è adeguata. Ad esempio,

- $M_{it}$ numero di sinistri per la polizza $i$, nell'anno $t$, con tempo di esposizione $esp_{it}$,
- $X_{it}$ risarcimento totale per la polizza $i$, nell'anno $t$, con tempo di esposizione $esp_{it}$ oppure con esposizione monetaria $w_{it}$,
- $X_{it}$ risarcimento totale per il portafoglio $i$, nell'anno $t$, con montepremi $P_{it}$.

Se, negli esempi, poniamo

$$Y_{it} = M_{it}/esp_{it}, \quad Y_{it} = X_{it}/esp_{it}, \quad Y_{it} = X_{it}/w_{it}, \quad Y_{it} = X_{it}/P_{it},$$

esprimiamo le tre grandezze per unità di “esposizione”. Per tali numeri aleatori si può pensare di accogliere un'ipotesi di uguale valore atteso, al variare di $t$, non di uguale distribuzione: è piuttosto naturale valutare di maggiore varianza una grandezza con minore “esposizione”.

Il modello di Bühlmann-Straub consente di tenere conto di tali aspetti.

Si assume

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ processi stocasticamente indipendenti al variare di $i$,
- $U_1, U_2, \dots$ identicamente distribuiti,
- fissato $i$, $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$, con momento primo e secondo finiti tali che

$$E(Y_{it}|U_i = u) = \mu(u), \qquad var(Y_{it}|U_i = u) = \frac{v(u)}{m_{it}},$$

$\mu(\cdot), v(\cdot)$ non dipendono da $i, t$, $m_{it}$ è una misura di "volume", nota, che dipende da $i, t$.

Poniamo

$$\mu = E[\mu(U_i)] = E[E(Y_{it}|U_i)] = E(Y_{it}),$$
$$v = E[v(U_i)] = E[m_{it} var(Y_{it}|U_i)] = m_{it} E[var(Y_{it}|U_i)],$$
$$a = var[\mu(U_i)] = var[E(Y_{it}|U_i)].$$

Analogamente al modello di Bühlmann, $\mu(U_i)$ è il premio individuale nell'anno $t$, per ogni $t$. Il parametro $\mu$ è il premio collettivo nell'anno $t$, per ogni $t$, $a$ è una "misura" di eterogeneità, $v, a$ intervengono nella varianza di $Y_{it}$,

$$var(Y_{it}) = E[var(Y_{it}|U_i)] + var[E(Y_{it}|U_i)] = \frac{v}{m_{it}} + a.$$

I tre parametri $\mu, v, a$, che non dipendono da $i$, sono i **parametri di struttura del modello** e da tali parametri dipende il sistema normale. Si ha infatti

- $E(Y_{it}) = \mu$,
- $var(Y_{it}) = \frac{v}{m_{it}} + a$,
- per $h \neq t$ , $cov(Y_{ih}, Y_{it}) = E(Y_{ih}Y_{it}) - E(Y_{ih})E(Y_{it})$

$$= E[E(Y_{ih}Y_{it}|U_i)] - E(Y_{it})^2$$

$$= E[E(Y_{ih}|U_i)E(Y_{it}|U_i)] - (E[E(Y_{it}|U_i)])^2$$

↑ per l'indipendenza condizionata

$$= E[\mu(U_i)^2] - (E[\mu(U_i)])^2 = var\big(\mu(U_i)\big) = a$$

Il sistema normale

$$\begin{cases} E\left(Y_{i,T+1}\right) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t E(Y_{it}) \\ cov(Y_{ih}, Y_{i,T+1}) = \sum_{t=1}^{T} \alpha_t cov(Y_{ih}, Y_{it}), \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu = \alpha_0 + \mu \sum_{t=1}^{T} \alpha_t \\ a = \alpha_h \left(\frac{v}{m_{ih}} + a\right) + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq h}}^{T} \alpha_t a, \quad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ a = \alpha_h \frac{v}{m_{ih}} + a \sum_{t=1}^{T} \alpha_t, \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

Posto $k = v/a$ e $m_{i\bullet} = \sum_{t=1}^{T} m_{it}$,

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ 1 = \alpha_h k \frac{1}{m_{ih}} + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t, \quad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ \alpha_h = \frac{m_{ih}}{k} \left(1 - \sum_{t=1}^{T} \alpha_t\right), \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{t=1}^{T} \alpha_t = 1 - \alpha_0/\mu \\ \alpha_h = \frac{m_{ih}}{k} \frac{\alpha_0}{\mu}, \quad h = 1, \dots, T \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m_{i\bullet} \frac{\alpha_0}{\mu k} = 1 - \frac{\alpha_0}{\mu} \\ \alpha_h = \frac{m_{ih}}{k} \frac{\alpha_0}{\mu}, \quad h = 1, \dots, T \end{cases}$$

L'ultimo passaggio è ottenuto sommando membro a membro le equazioni del secondo gruppo e sostituendo nella prima equazione. La soluzione del sistema, che dipende da $i$, è

$$\alpha_{i0}^* = \mu \frac{k}{m_{i\bullet} + k}, \qquad \alpha_{it}^* = \frac{m_{it}}{m_{i\bullet} + k}, \; t = 1, \dots, T.$$

Lo **stimatore di credibilità lineare del premio individuale in $T+1$** è

$$\widetilde{\mu_{\iota,T+1}(U_\iota)}^{cred} = \alpha_{i0}^* + \sum_{t=1}^T \alpha_{it}^* Y_{it} = \mu \frac{k}{m_{i\bullet}+k} + \sum_{t=1}^T \frac{m_{it}}{m_{i\bullet}+k} Y_{it}$$

$$= (1 - z_{iT})\mu + z_{iT}\overline{\overline{Y}}_{iT}$$

dove

- $z_{iT} = \frac{m_{i\bullet}}{m_{i\bullet}+k}$, con $k = \frac{v}{a}$,
- $\overline{\overline{Y}}_{iT} = \sum_{t=1}^T \frac{m_{it}}{m_{i\bullet}} Y_{it}$, media ponderata dei valori della grandezza di interesse con pesi le esposizioni relative.

Vista la storia di sinistrosità $H_{iT} = (Y_{i1} = y_{i1}, \dots, Y_{iT} = y_{iT})$, **il premio di credibilità in $T+1$** è

$$P_{i,T+1}^{cred}(H_{iT}) = (1 - z_{iT})\mu + z_{iT} \sum_{t=1}^T \frac{m_{it}}{m_{i\bullet}} y_{it},$$

media ponderata del premio a priori (collettivo) $\mu$ e della media osservata della grandezza di interesse $\sum_{t=1}^T \frac{m_{it}}{m_{i\bullet}} y_{it}$ con fattore, peso di credibilità $z_{iT}$.

Il peso di credibilità $z_{iT} = \frac{m_{i\bullet}}{m_{i\bullet}+k}$, dipende da $m_{i\bullet}, k$

- fissato $k$, $z_{iT}$ è crescente al crescere di $m_{i\bullet}$, che dipende da $T, m_{i1}, \dots, m_{iT}$,
- fissato $m_{i\bullet}$, $z_{iT}$ è decrescente al crescere di $k$, se c'è "poca" eterogeneità residua, il premio individuale $E(Y_{it}|U_i) = \mu(U_i)$ ha poca variabilità, se $a$ è "piccolo" relativamente a $v$, $k = v/a$ è "grande" e dunque $z_{iT}$ è "piccolo": non si attribuisce molto peso alla storia individuale; viceversa, se c'è "molta" eterogeneità residua $z_{iT}$ è "grande": si attribuisce peso maggiore alla sintesi della storia individuale rispetto al premio collettivo.

**Modello di Bühlmann-Straub, stima dei parametri**

Il premio di credibilità dipende dai parametri di struttura. Tali parametri sono stimati dai dati, tramite stimatori non distorti (stime non parametriche).

Supponiamo di disporre dei dati per $r$ assicurati della collettività, osservati ciascuno per $T$ anni. Per l'assicurato *i*-esimo, siano $Y_{it}$ la grandezza aleatoria di interesse nell'anno $t$, $U_i$ il parametro aleatorio di rischio, $m_{it}$ la misura di esposizione e $y_{it}$ valore osservato di $Y_{it}$.

Per i processi dei diversi assicurati si assumono le ipotesi del modello, con parametri di struttura $\mu, v, a$.

Spesso sono utilizzati i seguenti stimatori non distorti.

Stimatore per $\mu$. Consideriamo le medie ponderate per rischio

$$\bar{\bar{Y}}_{iT} = \sum_{t=1}^{T} \frac{m_{it}}{m_{i\bullet}} Y_{it} = \tilde{\mu}_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

e la loro media ponderata

$$\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{r} \frac{m_{i\bullet}}{m_{\bullet\bullet}} \tilde{\mu}_i, \text{ dove } m_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^{r} m_{i\bullet}$$

Stimatore per $v$. Consideriamo le seguenti varianze campionarie per rischio

$$\tilde{\sigma}_i^2 = \frac{1}{T-1} \sum_{t=1}^{T} m_{it} (Y_{it} - \tilde{\mu}_i)^2, \quad i = 1, \dots, r,$$

e la loro media aritmetica

$$\tilde{v} = \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} \tilde{\sigma}_i^2.$$

Stimatore per $a$.

$$\tilde{a} = \frac{m_{\bullet\bullet}}{m_{\bullet\bullet}^2 + \sum_{i=1}^{r} m_{i\bullet}^2} \left[\sum_{i=1}^{r} m_{i\bullet} (\tilde{\mu}_i - \tilde{\mu})^2 - (r-1)\tilde{v}\right].$$

Notiamo che, in una collettività non omogenea, il parametro $a$ è positivo. Tale dovrà risultare la stima.

**Esempio Bühlmann-Straub.** Due gruppi di assicurati. Obiettivo: valutare i risarcimenti attesi (premi equi) per i due gruppi, nell'anno 4.

| | | Anno | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 1 | 2 | 3 | 4 |
| Gruppo 1 | Risarcimento totale | **15 000** | **22 400** | **25 200** | |
| | Esposizione | **50** | **70** | **80** | **85** |
| | Risarcimento totale per unità di esposizione (quota danni) | **300** | **320** | **315** | |
| Gruppo 2 | Risarcimento totale | **46 500** | **48 000** | **44 950** | |
| | Esposizione | **150** | **160** | **155** | **110** |
| | Risarcimento totale per unità di esposizione (quota danni) | **310** | **300** | **290** | |

Per il gruppo *i*-esimo nell'anno $t$, siano

- $X_{it}$ il risarcimento totale
- $m_{it}$ l'esposizione,
- $Y_{it} = X_{it}/m_{it}$ il risarcimento medio per unità di esposizione

Assumendo il modello di Bühlmann-Straub per i risarcimenti per unità di esposizione, si ha

$m_{1\bullet}$= 200, $m_{2\bullet}$= 465, $m_{\bullet\bullet}$= 665

$\hat{\mu}_1$= 313.00, $\hat{\mu}_2$= 299.89, $\hat{\sigma}_1^2$= 6 100.00, $\hat{\sigma}_2^2$= 15 247.31

Parametri di struttura

$\hat{\mu} = 303.83$, $\hat{v} =10\,673.66$, $\hat{a} = 47.74$, $\hat{k} = \hat{v}/\hat{a} = 223.57$

Coefficienti di credibilità

$z_{1T} = 0.472$, $1 - z_{1T} = 0.528$
$z_{2T} = 0.675$, $1 - z_{2T} = 0.325$

Premi di credibilità nell'anno 4, per unità di esposizione

$P_{1,T+1}^{cred}(H_{1T}) = 0.528 \times 303.83 + 0.472 \times 313.00 = 308.16$
$P_{2,T+1}^{cred}(H_{2T}) = 0.325 \times 303.83 + 0.675 \times 299.89 = 301.17$

Premi di credibilità nell'anno 4

308.16 x 85 = 26 193.80 (303.83 x 85 = 25 825.94)

301.17 x 110 = 33 128.97 (303.83 x 110 = 33 421.80)

**Esempio. Modello Poisson-mistura semiparametrico per i numeri di sinistri, con personalizzazione *a priori***

Per l'assicurato $i$-esimo, siano $N_{it}$ il numero di sinistri nell'anno $t$ e $U_i$ il parametro aleatorio di rischio. Assumiamo

- $\{U_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots\}$ processi stocasticamente indipendenti al variare di $i$,
- $U_1, U_2, \dots$ identicamente distribuiti,
- fissato $i$,
  $N_{i1}|U_i = u, N_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$,
  $N_{it}|U_i = u \sim P(\lambda_{it} u)$, per ogni $t$, $\lambda_{it} > 0$,
  $U_i$ tale che $E(U_i) = 1$, $var(U_i) = \sigma^2$.

Si ha

$$E(N_{it}) = E[E(N_{it}|U_i)] = E(\lambda_{it} U_i) = \lambda_{it}.$$

Il premio (per la frequenza) *a priori* nell'anno $t$ per l'assicurato $i$-esimo, dipende da $i, t$. Se il portafoglio di rischi è ripartito in classi tariffarie, $\lambda_{it}$ può rappresentare il premio *a priori* valutato per la classe tariffaria alla quale l'assicurato appartiene nell'anno $t$.

Posto

$$Y_{it} = \frac{N_{it}}{\lambda_{it}},$$

per tali numeri aleatori si ha

- $\{U_i, Y_{i1}, Y_{i2}, \dots\}$ processi stocasticamente indipendenti al variare di $i$,
- $U_1, U_2, \dots$ identicamente distribuiti, con $E(U_i) = 1$, $var(U_i) = \sigma^2$,
- fissato $i$,

  $Y_{i1}|U_i = u, Y_{i2}|U_i = u, \dots$ stocasticamente indipendenti per ogni $u$ determinazione di $U_i$, con

  $E(Y_{it}|U_i = u) = \frac{1}{\lambda_{it}} E(N_{it}|U_i = u) = u = \mu(u),$ $\mu(\cdot)$ non dipende da $i, t$,

  $var(Y_{it}|U_i = u) = \frac{1}{\lambda_{it}^2} var(N_{it}|U_i = u) = \frac{1}{\lambda_{it}} u = \frac{1}{\lambda_{it}} v(u),$ $v(\cdot)$ non dipende da $i, t$,

Sono soddisfatte le ipotesi del modello di Bühlmann-Straub con: $\mu(\cdot)$, $v(\cdot)$ funzione identica, $m_{it} = \lambda_{it}$.

I parametri di struttura sono

$$\mu = E[\mu(U_i)] = E(U_i) = 1,$$
$$v = E[v(U_i)] = E(U_i) = 1,$$
$$a = var[\mu(U_i)] = var(U_i) = \sigma^2.$$

Si può ottenere lo stimatore di credibilità per $Y_{i,T+1}$

$$\widetilde{\mu_{\iota,T+1}(U_\iota)}^{cred} = E\left(\widetilde{Y_{\iota,T+1}}\middle|U_\iota\right)^{cred} = (1 - z_{iT})\mu + z_{iT}\bar{\bar{Y}}_{iT} = \frac{1 + \sigma^2 \sum_{t=1}^{T} N_{it}}{1 + \sigma^2 \sum_{t=1}^{T} \lambda_{it}},$$

dove

$$z_{iT} = \frac{\lambda_{i\bullet}}{\lambda_{i\bullet} + 1/\sigma^2}, \quad \text{con } \lambda_{i\bullet} = \sum_{t=1}^{T} \lambda_{it}, \text{ e } \quad \bar{\bar{Y}}_{iT} = \sum_{t=1}^{T} \frac{\lambda_{it}}{\lambda_{i\bullet}} Y_{it}.$$

Lo stimatore di credibilità del premio per la frequenza in $T + 1$

$$E\left(\widetilde{N_{\iota,T+1}}\middle|U_\iota\right)^{cred} = \lambda_{i,T+1} \frac{1 + \sigma^2 \sum_{t=1}^{T} N_{it}}{1 + \sigma^2 \sum_{t=1}^{T} \lambda_{it}}.$$

**CREDIBILITÀ ESATTA (CENNO)**

Nel modello Poisson-gamma, per un fissato assicurato, lo **stimatore bayesiano** del premio individuale in $T+1$ è

$$E(N_{T+1}|N_1,\ldots,N_{T+1}) = \lambda\frac{\alpha}{\alpha+\lambda T} + \frac{\sum_{t=1}^{T} N_t}{T}\frac{\lambda T}{\alpha+\lambda T} = \lambda(1-z_T) + \frac{\sum_{t=1}^{T} N_t}{T} z_T\ ,$$

che è una formula di credibilità. Questo succede anche in altri modelli.

Si parla di **credibilità esatta** quando in un modello bayesiano lo stimatore bayesiano del premio individuale coincide con lo stimatore di credibilità.

Riprendiamo lo schema bayesiano, per un fissato assicurato (omettiamo l'indice $i$),

- $Y_1|U=u, Y_2|U=u,\ldots$ stocasticamente indipendenti, di legge assegnata, per ogni $u$ determinazione possibile di $U$,
- $U$ di legge assegnata.

Può accadere che lo stimatore bayesiano del premio individuale sia una funzione lineare (affine) del vettore delle osservazioni ovvero che

$$E(\mu_{T+1}(U)|Y_1, \dots, Y_T) = E(Y_{T+1}|Y_1, \dots, Y_T) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t Y_t.$$

Allora, se si calcola lo stimatore di credibilità si ottiene lo stesso stimatore. Infatti lo stimatore bayesiano è soluzione di

$$\underset{g \in \mathcal{G}}{\operatorname{argmin}}\, E[(\mu_{T+1}(U) - g(Y_1, \dots, Y_T))^2],$$

lo stimatore di credibilità è soluzione di

$$\underset{g \in \mathcal{L}}{\operatorname{argmin}}\, E[(\mu_{T+1}(U) - g(Y_1, \dots, Y_T))^2],$$

dove $\mathcal{L} \subset \mathcal{G}$, $\mathcal{L} = \{g : g(y_1, \dots, y_T) = \alpha_0 + \sum_{t=1}^{T} \alpha_t y_t\}$.

Tale situazione si verifica in riferimento alle distribuzioni delle famiglie esponenziali lineari e delle loro coniugate naturali.

Si assuma che

- $Y_t|U = u \sim f_{Y_t|U=u} \in \mathcal{F}$ **famiglia esponenziale lineare**, con

$$f_{Y_t|U=u}(y) = exp\left\{\omega_t \frac{yu - b(u)}{\phi}\right\} c(y, \phi, \omega_t), \quad y \in \mathcal{Y},$$

dove

$b(\cdot)$ è la funzione cumulante,

$u$ è il parametro canonico,

$\phi$ è il parametro di dispersione,

$\omega_t > 0$ peso.

Si noti che le distribuzione, al variare di $t$, possono differire solo per i pesi.

- $U \sim f_U \in \mathcal{U}$ , con

$$f_U(u) = exp\left\{\frac{\mu u - b(u)}{\delta}\right\} d(\mu, \delta), \quad u \in ]u_0, u_1[,$$

dove

$\mu, \delta$ sono parametri,

$d(\mu, \delta)$ è una costante di normalizzazione.

Consideriamo la densità *a posteriori* del parametro aleatorio $U$, condizionata a $H_T = (Y_1 = y_1, \dots, Y_T = y_T)$, dal Teorema di Bayes per densità

$$f_{U|H_T}(u) \propto \underset{\substack{\uparrow \\ \text{densità } a\ priori}}{f_U(u)} \prod_{t=1}^{T} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{verosimiglianza dell'osservazione}}}{f_{Y_t|U=u}(y_t)}$$

$$\propto e^{\frac{\mu u - b(u)}{\delta}} \prod_{t=1}^{T} e^{\omega_t \frac{y_t u - b(u)}{\phi}} = e^{\frac{\mu u - b(u)}{\delta}} \; e^{\sum_{t=1}^{T} \omega_t \frac{y_t u - b(u)}{\phi}}$$

$$= exp\left\{\frac{\mu u}{\delta} - \frac{b(u)}{\delta} + \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_t y_t u}{\phi} - \frac{b(u)}{\phi} \sum_{t=1}^{T} \omega_t\right\}$$

$$= e^{\left(\frac{\mu}{\delta} + \omega_\bullet \frac{\bar{\bar{y}}_T}{\phi}\right) u} \; e^{-\, b(u)\left(\frac{1}{\delta} + \frac{\omega_\bullet}{\phi}\right)},$$

dove $\quad \omega_\bullet = \sum_{t=1}^{T} \omega_t, \quad \bar{\bar{y}}_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_t}{\omega_\bullet} y_t.$

Con semplici passaggi si ottiene

$$f_{U|H_T}(u) \propto exp\left\{\frac{\mu^* u - b(u)}{\delta^*}\right\},$$

dove $\quad \mu^* = \left(\frac{\phi}{\delta}\mu + \omega_\bullet \bar{\bar{y}}_T\right)\left(\frac{\phi}{\delta} + \omega_\bullet\right)^{-1}, \quad \delta^* = \phi\left(\frac{\phi}{\delta} + \omega_\bullet\right)^{-1}.$

Pertanto,

$$f_U(u) = exp\left\{\frac{\mu u - b(u)}{\delta}\right\} d(\mu, \delta) \quad \rightarrow \quad f_{U|H_T}(u) = exp\left\{\frac{\mu^* u - b(u)}{\delta^*}\right\} d(\mu^*, \delta^*)$$

La distribuzione *a posteriori* di $U|H_T$ appartiene ancora alla famiglia $\mathcal{U}$, ma con parametri aggiornati

$$\mu \rightarrow \mu^*, \quad \delta \rightarrow \delta^*$$

La famiglia $\mathcal{U}$ è **coniugata** della famiglia $\mathcal{F}$: se $f_U \in \mathcal{U}$ e $f_{Y_t|U=u} \in \mathcal{F}$ comportano che $f_{U|H_T} \in \mathcal{U}$, per ogni $H_T$, $\mathcal{U}$ è detta famiglia coniugata della famiglia $\mathcal{F}$.

Si prova che se

- la famiglia $\mathcal{U}$ nella quale si sceglie la distribuzione di $U$ è coniugata della famiglia esponenziale lineare $\mathcal{F}$ nella quale si scelgono le distribuzioni di $Y_1|U = u, Y_2|U = u$, ...,
- $exp\{\mu u - b(u)\} = 0$, per $u = u_0, u = u_1$, per ogni $\mu$,

allora il premio bayesiano coincide con il premio di credibilità per ogni vettore di osservazioni: si ha **credibilità esatta**. Riesce

$$E(Y_{T+1}|Y_1, \dots, Y_T) = \mu(1 - z_T) + \bar{\bar{Y}}_T z_T,$$

dove $\mu = E\big(\mu_{T+1}(U)\big) = E(Y_{T+1}),\quad z_T = \frac{\omega_\bullet}{\omega_\bullet + \phi/\delta},\quad \bar{\bar{Y}}_T = \sum_{t=1}^{T} \frac{\omega_t}{\omega_\bullet} Y_t.$

Sono ad esempio famiglie coniugate:

Poisson e Gamma

Gamma e Gamma

Normale e Normale

Binomiale e Beta

Alcuni riferimenti

H. Bühlmann, A. Gisler (2005), *A Course in Credibility Theory and its Applications*, Springer

T. Mikosch (2004), *Non-life insurance mathematics. An introduction with stochastic processes*, Springer

S.A. Klugman, H.H. Panjer, G.E. Willmot (1998), *Loss models. From data to decisions*, Wiley (prima edizione e seguenti)