

Assiomi di numerabilità

Def. Uno spazio topologico X è detto:

I-Numerabile se ogni punto $x \in X$ ammette base di intorni numerabile

$$\mathcal{J}_x = \{J_{x,n}\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

II-Numerabile se X ammette base numerabile

$$\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Oss. Metrizzabile \Rightarrow *I-numerabile*: $\mathcal{J}_x = \{B(x, \frac{1}{n})\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Esempio. \mathbb{R}_ℓ *I-numerabile*: $\mathcal{J}_x = \{[x, x + \frac{1}{n}]\}_{n \in \mathbb{N}}$.

\mathbb{R}_ℓ non *II-numerabile* (lo mostreremo più avanti).

Esempio. \mathbb{R}_{dis} non *II-numerabile*.

Prop. *II-numerabile* \Rightarrow *I-numerabile*.

Dim. X spazio *II-numerabile*, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerabile per $X \rightsquigarrow \forall x \in X$, $\mathcal{J}_x = \{B_n \in \mathcal{B} \mid x \in B_n\}$ base di intorni numerabile di x . \square

N. B. *I-numerabile* $\not\Rightarrow$ *II-numerabile*.

Def. $D \subset X$ è *denso* in X se $\text{Cl}_X D = X$.

Prop. $D \subset X$ è *denso* $\Leftrightarrow \forall U \subset X$ aperto non vuoto si ha $D \cap U \neq \emptyset$.

Dim. Segue subito dalla caratterizzazione dei punti della chiusura. \square

Oss. Se su X è data una base, è sufficiente considerare aperti basici.

Esempio. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ denso numerabile. $\mathbb{Q}^n \subset \mathbb{R}^n$ denso numerabile.

Esempio. $\mathbb{R} - \{0\} \subset \mathbb{R}$ aperto denso.

Def. Uno spazio topologico X è *separabile* se X ammette un sottoinsieme denso numerabile.

Esempio. \mathbb{R}^n separabile: \mathbb{Q}^n denso numerabile.

Esempio. \mathbb{R}_ℓ separabile: \mathbb{Q} denso numerabile.

Prop. *I-numerabile* e *II-numerabile* sono proprietà topologiche ereditarie. *Separabile* è una proprietà topologica.

N. B. Separabile non è ereditaria.

Prop. Ogni spazio topologico *II-numerabile* è separabile.

Dim. X *II-numerabile*, $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ base numerabile di aperti non vuoti $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \exists d_n \in B_n \rightsquigarrow D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ denso numerabile. \square

N. B. Separabile $\not\Rightarrow$ *II-numerabile*.

N. B. Si usa l'Assioma della scelta.

Teor. Ogni spazio metrizzabile separabile è II-numerabile.

Dim. (X, d) spazio metrico, $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ denso numerabile in $X \rightsquigarrow$

$$\mathcal{B} = \left\{ B_d\left(d_n, \frac{1}{k}\right) \mid n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

famiglia numerabile di bocce aperte, mostriamo che è base.

$\forall U \subset X$ aperto, $\forall x \in U \Rightarrow \exists r > 0$ t.c. $B_d(x, r) \subset U \rightsquigarrow \exists k \in \mathbb{N}$ t.c. $\frac{1}{k} < \frac{r}{2} \rightsquigarrow \exists n \in \mathbb{N}$ t.c. $d_n \in B_d(x, \frac{1}{k}) \Rightarrow x \in B_d(d_n, \frac{1}{k}) \subset B_d(x, r) \subset U$. \square

Cor. X metrizzabile separabile e $Y \subset X \Rightarrow Y$ II-numerabile e separabile.

Dim. X II-numerabile $\Rightarrow Y$ II-numerabile $\Rightarrow Y$ separabile. \square

Cor. \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , B^n e S^n sono I-numerabili, II-numerabili e separabili.

Successioni

Def. Una successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ in uno spazio X è *convergente* a $x \in X$ se $\forall U \subset X$ intorno di x , $\exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $x_n \in U \forall n \geq N$, e scriviamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

N. B. Non è detto che il limite esista e se esiste non è detto che sia unico. Vale l'unicità del limite negli spazi di Hausdorff.

Esempio. $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X_{\text{ban}}$ converge a $\forall x \in X_{\text{ban}}$.

Prop. Sia (X, d) spazio metrico. $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ converge a $x \in X \Leftrightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0.$$

La dimostrazione è semplice e nota dall'Analisi.

Prop. Supponiamo X metrizzabile. $D \subset X$ è denso in $X \Leftrightarrow$

$\forall x \in X$, $\exists (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = x$.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto, $\forall x \in U$, $\exists (d_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D$ t.c. $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = x \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N}$ t.c. $d_n \in U \forall n \geq N \Rightarrow D \cap U \neq \emptyset \Rightarrow D$ denso.

$\boxed{\Rightarrow}$ Scegliamo distanza d su X . $\forall x \in X \forall n \in \mathbb{N} \exists d_n \in D \cap B_d(x, \frac{1}{n}) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = x$. \square

Oss. Generalizza il fatto che ogni numero reale è limite di numeri razionali.

Teor. Supponiamo X spazio metrizzabile e $A \subset X$ non vuoto.

$\forall x \in X$ si ha $x \in \text{Cl}_X A \Leftrightarrow \exists (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset A$ t.c. $x = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$ Si usa il fatto che $x \in \text{Cl}_X A \Leftrightarrow d(x, A) = 0$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Scegliamo distanza d su X . $\forall n \in \mathbb{N} \exists a_n \in A \cap B_d(x, \frac{1}{n})$. \square