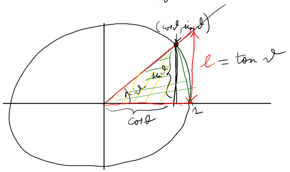
17 ottobre

<u>Lemma</u> (un limite notevole) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

<u>Dim</u> Ci interessa valutare $\frac{\sin x}{x}$ per $|x| < \frac{\pi}{2}$

Cominciamo col valutare $\frac{\sin \vartheta}{\vartheta}$ per $0<\vartheta<\frac{\pi}{2}$



I due triangoli evidenziati nella figura, sono simili.

$$\frac{\cos\vartheta}{1} = \frac{\sin\vartheta}{\ell} \qquad \ell = \tan\vartheta$$

Area triangolo verde $= \frac{\sin\vartheta}{2}$

Area triangolo rosso $= \frac{\tan\vartheta}{2}$

Area settore circolare $= \frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{\sin\vartheta}{\cancel{2}} < \frac{\vartheta}{\cancel{2}} < \frac{\tan\vartheta}{\cancel{2}}$$

$$\sin\vartheta < \vartheta < \tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta} \qquad \text{dividendo per } \underbrace{\sin\vartheta}_{>0}$$

$$1 < \frac{\vartheta}{\sin\vartheta} < \frac{1}{\cos\vartheta} \qquad \text{per ogni } \vartheta \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \qquad \forall\ x \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Siccome $\frac{x}{\sin x}$ e $\frac{1}{\cos x}$ sono funzioni pari

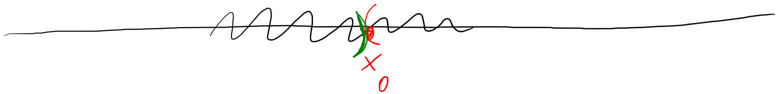
segue
$$\begin{array}{ccccc} 1 & < & \frac{x}{\sin x} & < & \frac{1}{\cos x} \\ \downarrow{\scriptstyle x\to 0} & & \downarrow{\scriptstyle x\to 0} & & \downarrow{\scriptstyle x\to 0} \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array} \qquad \forall\ x \text{ t.c. } 0<|x|<\frac{\pi}{2}$$

Per i confronti abbiamo dimostrato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \implies \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Def (Limite destro (sinistro)) Sia $f: X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in X'$. Sia anche $x_0 \in (X \cap (x_0,+\infty))'$

$(x_0 \in (X \cap (-\infty,x_0))')$



Allora, considerata la restrizione $f|_{X\cap(x_0,+\infty)}: X \cap (x_0,+\infty) \to \mathbb{R}$

scrivo

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f|_{X\cap(x_0,+\infty)}(x)$$

se l'ultimo limite esiste e lo chiamiamo limite destro di f in x_0.

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = \lim_{x\to x_0} f|_{X\cap(-\infty,x_0)}(x)$$

$A \qquad A'$

$A\cap B \qquad (A\cap B)' \qquad A\cap B'$

Teorema Sia $x_0 \in X'$ $\quad f : X \to \mathbb{R}$

$$x_0 \in (X \cap (-\infty, x_0))' \quad \text{e} \quad x_0 \in (X \cap (x_0, +\infty))'$$

Sono equivalenti le seguenti due proposizioni

1) $\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$

2) Esistono separatamente $\lim_{x \to x_0^-} f(x)$ e $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$

e risulta $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$

Ed inoltre, quando 1) e 2) sono vere ~~si~~ ha

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

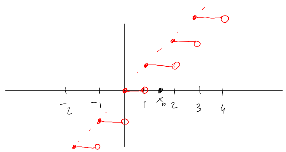
Teor $f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I'$, f crescente (decrescente).

Allora

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup_{(\inf)} \left\{ f(x) : \begin{array}{l} x < x_0 \\ x \in I \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf_{(\sup)} \left\{ f(x) : \begin{array}{l} x > x_0 \\ x \in I \end{array} \right\}$$

$[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ crescente



Sia $x_0 \notin \mathbb{Z}$, e $\underset{[x_0]}{n} < x_0 < n+1$ con $n \in \mathbb{Z}$

$$\lim_{x \to x_0} [x] = \lim_{x \to x_0} [x]\Big|_{(n,n+1)} = \lim_{x \to x_0} [x_0] = [x_0]$$

$x_0 \in \mathbb{Z}$ $x_0 = n$

$$\lim_{x \to n^+} [x] = \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} [x] = \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} [x]\Big|_{(n,n+1)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to n \\ x > n}} n = n = [n]$$

$$\lim_{x \to n^-} [x] = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} [x] = \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} [x]\Big|_{(n-1,n)}$$

$$= \lim_{\substack{x \to n \\ x < n}} (n-1) = n-1 \neq [n]$$

Se esiste ed è finito $\lim_{x \to x_0^+} f(x)$ ($x \to x_0^-$) lo denoteremo con $f(x_0^+)$ ($f(x_0^-)$)

$n \in \mathbb{Z}$

$[n^+] = n$

$[n^-] = n - 1$

Teorema Sia $b>1$ e consideriamo la funzione $b^x:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

b^x è continua in $\mathbb{R}$ (l'insieme delle funzioni continue definite in $X \subseteq \mathbb{R}$ a valori in $\mathbb{R}$ verrà denotato con $C^0(X)$; in questo caso b^x appartiene a $C^0(\mathbb{R})$)

Dim Ricordiamo che b^x è strettamente crescente

Incominciamo col dimostrare che b^x è continua in 0,

cioè $\lim_{x\to 0} b^x = b^0 = 1$

In particolare consideriamo $\lim_{x\to 0^+} b^x = ?$

$$\lim_{x\to 0^+} b^x = \inf\{b^x : x>0\} = 1$$

Per $x>0$, sappiamo che $b^x > b^0 = 1$

Quindi 1 è un minorante dell'insieme $\{b^x : x>0\}$

$$\Rightarrow \quad 1 \le \inf\{b^x ; x>0\} \le \inf\{b^{\frac{1}{n}} : n>0\}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} b^{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\Rightarrow \inf\{b^x ; x>0\} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} b^x = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} b^x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} b^x = \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} b^{-y} \qquad y=-x$$

$$= \lim_{\substack{y\to 0\\ y>0}} \frac{1}{b^y} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} b^x = 1 = b^0$$

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e verifichiamo $\lim_{x\to x_0} b^x = b^{x_0}$

$x = x_0 + h$

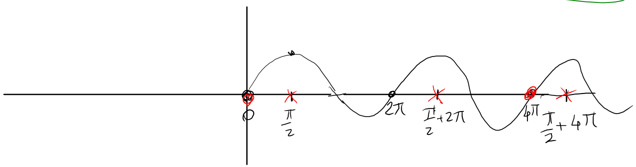
$$\lim_{x\to x_0} b^x = \lim_{h\to 0} b^{x_0+h} = \lim_{h\to 0} b^{x_0}\, b^h =$$

$$= b^{x_0} \lim_{h\to 0} b^h = b^{x_0}$$

$\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste

Supponiamo per assurdo esista $\lim_{x \to +\infty} \sin x = L \in \mathbb{R}$

$\ast$ $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists K_\varepsilon \quad t.c. \quad x > K_\varepsilon \Rightarrow |\sin x - L| < \varepsilon}$



so che $\sin(2n\pi) = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

so che $\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Da $\ast$ ricavo che se $2n\pi > K_\varepsilon$

cioè se $n > \frac{1}{2\pi} K_\varepsilon$

allora $|\underbrace{\sin(2n\pi)}_{0} - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon$

Pertanto $|L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L = 0$

Da $\ast$ ricavo che se $2n\pi + \frac{\pi}{2} > K_\varepsilon$

cioè se $n > \frac{1}{2\pi}\left(K_\varepsilon - \frac{\pi}{2}\right)$

allora $|\sin(2n\pi + \frac{\pi}{2}) - L| < \varepsilon$

cioè $|1 - L| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow L = 1$