Capitolo 2

Spazi vettoriali

2.1 Vettori applicati e vettori liberi

L'algebra lineare e la geometria affine sono due teorie che sono state sviluppate negli ultimi due secoli sul modello dell'algebra dei vettori liberi su una retta, in un piano o in uno spazio fisico, le cui proprietà sono una conseguenza degli assiomi classici della geometria euclidea. L'algebra lineare come strumento si è rivelata molto potente, perché applicabile a svariati contesti diversi, ha permesso di organizzare la geometria dello spazio euclideo in modo più efficiente sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista computazionale rispetto all'approccio antico, e perché è alla base della moderna Analisi Funzionale.

È utile, in ogni caso, richiamare e rivedere velocemente la geometria e le operazioni con i vettori applicati e i vettori liberi, che permette di comprendere meglio la scelta delle definizione e degli assiomi dell'algebra lineare, e sarà di aiuto durante tutto il corso per la comprensione degli argomenti più complicati.

Consideriamo un piano o uno spazio "fisico". Un **vettore applicato** è un segmento orientato, ed è assegnato dando un punto di applicazione (il punto iniziale), la sua direzione (la retta su cui giace, detta anche giacitura), il suo modulo (la lunghezza del segmento, che è un numero reale ≥ 0), e il suo verso (uno dei due possibili versi di percorrenza della retta di giacitura). Osserviamo che tra i vettori applicati vi è anche il vettore nullo, identificabile con un punto del piano; per esso la direzione è indeterminata (esso giace su qualunque retta passante per il punto), e così pure il verso.

Un vettore applicato può essere caratterizzato anche come il dato di una coppia di punti, e precisamente: un punto iniziale A, punto di applicazione, ed un punto finale B, e verrà indicato con

$$\vec{AB}.$$

I vettori del tipo $\vec{AA}$, cioè tali che il punto di applicazione coincide con il punto finale, sono detti vettori applicati nulli.

Definizione 2.1.1. La **somma di due vettori applicati** del tipo $\vec{AB}$ e $\vec{BC}$ è per definizione il vettore

$$\vec{AB} + \vec{BC} := \vec{AC}.$$

Osservazione 1. La somma di un vettore $\vec{AB}$ con un vettore nullo del tipo $\vec{AA}$ oppure $\vec{BB}$ verifica:

$$\vec{AA} + \vec{AB} = \vec{AB}, \qquad \vec{AB} + \vec{BB} = \vec{AB}.$$

Inoltre la somma verifica la proprietà associativa:

$$\vec{AB} + (\vec{BC} + \vec{CD}) = (\vec{AB} + \vec{BC}) + \vec{CD}.$$

Definizione 2.1.2. La **moltiplicazione di un vettore applicato per uno scalare** è definita come segue: per ogni vettore applicato $\vec{AB}$ e per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$, il vettore $a \cdot \vec{AB}$ è quel vettore geometrico che ha

- la stessa direzione di $\vec{AB}$,
- lunghezza pari a quella di $\vec{AB}$ moltiplicata per il valore assoluto $|a|$ di a,
- verso concorde con $\vec{AB}$ se $a > 0$, altrimenti ha verso opposto. Se $a = 0$ si pone $0 \cdot \vec{AB} = \vec{AA}$.

Vediamo ora la nozione di *vettore libero*. Due vettori applicati sono detti **equipollenti** se hanno la stessa direzione, la stessa lunghezza e lo stesso verso; in altre parole se giacciono su due rette parallele e se, muovendo una delle due rette parallelamente a se stessa, è possibile sovrapporre i due vettori in modo che i relativi punti iniziali e finali coincidano.

Si osservi che l'equipollenza è una relazione di equivalenza nell'insieme dei vettori applicati. Infatti ci si convince facilmente che valgono le seguenti proprietà: riflessiva, simmetrica e transitiva. Un **vettore libero o geometrico** è una classe di equivalenza di vettori applicati per la relazione di equipollenza (in questo contesto si dice anche classe di equipollenza). Denoteremo tra le parentesi quadre $[\vec{AB}]$ le classi di equipollenza dei vettori applicati ed i corrispondenti vettori liberi con le lettere minuscole:

$$\vec{u} = [\vec{AB}].$$

Il vettore nullo $\vec{0}$ è quel vettore rappresentato da un vettore applicato del tipo $\vec{AA}$.

Denoteremo con $\mathcal{V}^1$, $\mathcal{V}^2$ e $\mathcal{V}^3$ gli insiemi di vettori liberi della retta, del piano e dello spazio rispettivamente.

Osservazione 2. Fissato un punto O del piano o dello spazio, ogni vettore geometrico $\vec{v}$ 'e rappresentato da un unico vettore applicato $\vec{OP}$. Questa affermazione segue dal quinto postulato della geometria euclidea.

Nell'insieme dei vettori geometrici è possibile definire due operazioni: la somma di vettori e la moltiplicazione per uno scalare reale.

Definizione 2.1.3. La **somma di due vettori geometrici** $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e $\vec{u} = [\vec{BC}]$ è così definita:

$$\vec{v} + \vec{u} = [\vec{AB}] + [\vec{BC}] := [\vec{AB} + \vec{BC}] = [\vec{AC}].$$

Osservazione 3. Si può verificare facilmente che la definizione è **ben posta**, cioè non dipende dai due rappresentanti scelti.

Inoltre, se i vettori $\vec{v}$ e $\vec{u}$ non sono allineati o nulli, la somma si può definire anche tramite la **regola del parallelogramma**:

se $\vec{v} = [\vec{OP}]$ e $\vec{u} = [\vec{OQ}]$, si costruisce il parallelogramma di lati OP ed OQ e si denota con R il quarto vertice di tale parallelogramma. La somma $\vec{v} + \vec{u}$ risulta uguale al vettore geometrico rappresentato da $\vec{OR}$.

Osservazione 4. L'operazione di somma tra due vettori geometrici soddisfa le seguenti proprietà:

- **Proprietà associativa**: per ogni scelta di una terna di vettori geometrici $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, si ha:
$$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}).$$
Sfruttando questa proprietà possiamo, ad esempio, scrivere espressioni come $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.

- **Proprietà commutativa**: per ogni coppia di vettori geometrici $\vec{v}$ e $\vec{u}$ si ha
$$\vec{v} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{v}.$$

- **Esistenza dell'elemento neutro**: se denotiamo con $\vec{0}$ il vettore nullo, allora per ogni vettore geometrico $\vec{v}$ vale:
$$\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}.$$

- **Esistenza dell'opposto**: per ogni vettore geometrico $\vec{v}$, esiste il suo opposto, cioè un vettore geometrico $-\vec{v}$, tale che
$$\vec{v} + (-\vec{v}) = (-\vec{v}) + \vec{v} = \vec{0},$$
dove $\vec{0}$ è il vettore nullo.
Infatti, si consideri un rappresentante $\vec{AB}$ di $\vec{v}$, e si definisca $-\vec{v}$ come la classe di equipollenza di $\vec{BA}$.
In seguito, per ogni coppia di vettori $\vec{v}, \vec{w}$, scriveremo semplicemente
$$\vec{v} - \vec{w}$$
in luogo di
$$\vec{v} + (-\vec{w}).$$

Nell'insieme dei vettori geometrici, oltre alla somma di due vettori, possiamo definire la moltiplicazione per scalari in modo analogo sfruttando la moltiplicazione per scalari con vettori applicati.

Definizione 2.1.4. Per ogni vettore geometrico $\vec{v} = [\vec{AB}]$ e per ogni numero reale $a \in \mathbb{R}$ poniamo
$$a \cdot \vec{v} := [a \cdot \vec{AB}].$$
Anche in questo caso è facile verificare che la definizione è ben posta, cioè non dipende dal rappresentante.

Proprietà dell'operazione di moltiplicazione per scalari: per ogni coppia di vettori geometrici $\vec{v}, \vec{w}$ e per ogni coppia di scalari $a, b \in \mathbb{R}$, si ha:

- $1 \cdot \vec{v} = \vec{v}$;
- $(-1) \cdot \vec{v} = -\vec{v}$;
- $(a + b) \cdot \vec{v} = a \cdot \vec{v} + b \cdot \vec{v}$; $(ab) \cdot \vec{v} = a \cdot (b \cdot \vec{v})$; $a \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = a \cdot \vec{v} + a \cdot \vec{w}$.

2.2 Spazi vettoriali

Sul modello dell'insieme dei vettori geometrici con le due operazioni appena descritte e le loro proprietà introduciamo la seguente definizione di spazio vettoriale. Osserviamo che la nuovo definizione è molto generale e comprende spazi di natura molto diversa.

Definizione 2.2.1. Uno **spazio vettoriale reale** o **$\mathbb{R}$-spazio vettoriale** è un insieme non vuoto V su cui sono definite due operazioni, una somma

$$\begin{aligned} + : V \times V &\to V, \\ (v, w) &\to v + w, \end{aligned}$$

ed un prodotto per scalari

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{R} \times V \to V, \\ (a, v) \to a \cdot v, \end{aligned}$$

in modo che siano soddisfatti i seguenti assiomi, per ogni $u, v, w \in V$, e per ogni $a, b \in \mathbb{R}$:

1. V1: **proprietà associativa**:
$$(u + v) + w = u + (v + w);$$
2. V2: **proprietà commutativa**:
$$u + v = v + u;$$
3. V3: **esistenza del vettore nullo**: esiste $0 \in V$ tale che
$$0 + v = v + 0 = v;$$
4. V4: **esistenza dell'opposto**: per ogni $v \in V$, esiste un vettore $-v \in V$ tale che
$$v + (-v) = (-v) + v = 0;$$
5. V5: **distributiva di $\cdot$ rispetto a $+$**:
$$a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v;$$
6. V6: **distributiva di $\cdot$ rispetto alla somma di $\mathbb{R}$**:
$$(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v;$$
7. V7: $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$;
8. V8: per ogni $v \in V$ si ha
$$1 \cdot v = v.$$

Notiamo che abbiamo utilizzato lo stesso simbolo 0 per denotare sia il vettore nullo che lo zero come numero reale, per non appesantire la notazione. Inoltre, nel seguito, espressioni del tipo $v+(-w)$ verranno semplificate con $v - w$.

Esempio 2.2.2. 1. L'insieme dei vettori geometrici della retta $\mathcal{V}^1$, del piano $\mathcal{V}^2$ o dello spazio $\mathcal{V}^3$ con le operazioni descritte all'inizio del capitolo è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

2. L'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ con le usuali definizioni di somma tra numeri reali e prodotto tra numeri reali, dove questa volta il prodotto

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad (a, b) \to a \cdot b$$

viene considerato come operazione "esterna", nel senso che $\mathbb{R}$ gioca sia il ruolo di insieme degli scalari che il ruolo di spazio dei vettori.

3. il prodotto cartesiano

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

con l' operazione di somma così definita:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix}$$

e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(c, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) \to c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \end{pmatrix}$$

verifica gli assiomi per uno spazio vettoriale reale.

4. Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{N}$, il prodotto cartesiano di $\mathbb{R}$ per se stesso n -volte:

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R}, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

con l' operazione di somma così definita:

$$+ : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

e di moltiplicazione per uno scalare:

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(c, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \to c \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} c \cdot x_1 \\ c \cdot x_2 \\ \vdots \\ c \cdot x_n \end{pmatrix}$$

verifica gli assiomi per uno spazio vettoriale reale.

5. L'insieme delle funzioni reali
$$\mathcal{F} := \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\},$$
con l'operazione di somma (definita puntalmente):
$$+ : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad (f, g) \to f + g \ : \ (f + g)(r) := f(r) + g(r),$$
e la moltiplicazione per uno scalare
$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}, \qquad (c, f) \to c \cdot f \ : \ (c \cdot f)(r) := c \cdot f(r)$$
è uno spazio vettoriale reale.

6. L'insieme dei polinomi reali in una indeterminata:
$$\mathbb{R}[x] := \{p(x) \mid p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}\}$$
con l'usuale somma tra polinomi e l'usuale prodotto per uno scalare è uno spazio vettoriale reale.

2.3 Sottospazi vettoriali

Definizione 2.3.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme non vuoto $W \subseteq V$ si dice **sottospazio vettoriale** di V se valgono le seguenti condizioni:

- (W1) per ogni $w_1 \in W$ e per ogni $w_2 \in W$ si ha
$$w_1 + w_2 \in W;$$
- (W2) per ogni $W \in W$ e per ogni scalare $a \in \mathbb{K}$ si ha
$$a \cdot w \in W.$$

Osservazione 5. Osserviamo che un sottospazio vettoriale W è a sua volta uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ con le operazioni ereditate da V. È facile verificare che valgono gli assiomi $V1, \ldots, V8$ di spazio vettoriale.

Esempio 2.3.2. di sottospazi vettoriali

1. Il sottoinsieme $W = V$ risulta in modo evidente un sottospazio vettoriale, detto **sottospazio vettoriale improprio**.

2. Il sottoinsieme formato dal solo vettore nullo $\{0\} \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale, percheé verifica $W1$ e $W2$, e si chiama **sottospazio vettoriale banale**. Osserviamo che è il più piccolo sottospazio (e anche spazio) vettoriale.

3. Il sottoisieme di $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ costituito dalle funzioni **limitate**:
$$\mathcal{L}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \ f \text{ limitata}\} \subset \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$$
è un sottospazio vettoriale. Ricordiamo la definizione: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice limitata se $\exists\, M > 0$, $M \in \mathbb{R}$, tale che $|f(r)| \leq M$ per ogni $r \in \mathbb{R}$.

4. Nello spazio delle funzioni
$$\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$$
il sottoinsieme delle funzioni continue
$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ continua}\}$$
è un sottospazio vettoriale perché la somma di funzioni continue e la moltiplicazione di uno scalare per una funzione continua sono ancora funzioni continue.

   Analogamente si può verificare facilmente che il sottoinsieme delle funzioni derivabili con derivata continua
$$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ derivabile e } f' \text{ continua}\}$$
è un sottospazio vettoriale.

   Inoltre si ha
$$\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \supset \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}),$$
e $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ risulta anche sottospazio vettoriale di $\mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

5. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.

   Il sottoinsieme dei polinomi di grado minore o uguale a un grado fissato $d \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{R}[x]_{\leq d} := \{p(x) \mid \deg p(x) \leq d\}$$
risulta un sottospazio vettoriale.

Esempio 2.3.3. Sottoinsiemi che non sono sottospazi vettoriali

1. La circonferenza
$$S := \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1^2 + (x_2 - 1)^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$
non è un sottospazio vettoriale; infatti, ad esempio
$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in S, \text{ ma } -\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} \notin S.$$

2. In generale, ogni sottoinsieme **limitato** di $\mathbb{R}^2$ e di $\mathbb{R}^n$ in generale non è un sottospazio vettoriale; infatti, la condizione $W2$ implica che i vettori di un sottospazio vettoriale possano assumere "lunghezze" (vedremo la definizione in seguito) arbitrariamente grandi.

3. Le rette del piano che non passano per l'origine non sono sottospazi vettoriali, perché non contengono il vettore nullo.

4. Consideriamo lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi in una indeterminata a coefficienti in $\mathbb{R}$.

   Il sottoinsieme dei polinomi di grado **uguale a un grado fissato** $d \in \mathbb{N}$
$$\mathbb{R}[x]_d := \{p(x) \mid \deg p(x) = d\}$$
non risulta un sottospazio vettoriale, perché non verifica la $W1$. Ad esempio, la somma dei due polinomi
$$x^d - 1, \quad -x^d + 3$$
non è un polinomio di grado d: $x^d - 1 + (-x^d + 3) = 2$, polinomio costante, di grado zero.

Proposizione 2.3.4. *Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano*

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.

Allora l'intersezione

$$U \cap W \subseteq V$$

è ancora un sottospazio vettoriale.

Dimostrazione. Verifichiamo che vale la $W1$ per $U \cap W$:

siano $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq U$; siccome U è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in U.$$

Ma abbiamo anche $u_1, u_2 \in U \cap W \subseteq W$; siccome W è sottospazio vettoriale, si ha

$$u_1 + u_2 \in W.$$

Quindi $u_1 + u_2 \in U \cap W$.

Verifichaimo ora la $W2$: sia $u \in U \cap W$ e sia $c \in \mathbb{K}$; essendo $U \cap W \subseteq U$ ed essendo U sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in U.$$

Analogamente, essendo $U \cap W \subseteq W$ ed essendo W sottospazio vettoriale, si ha

$$c \cdot u \in W.$$

Concludiamo quindi nuovamente che $c \cdot u \in U \cap W$. □

Osservazione 6. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali.

In generale l'unione

$$U \cup W$$

non è un sottospazio vettoriale.

Ci chiediamo allora quale sia il più piccolo sottospazio vettoriale contenente due dati sottospazi. Abbiamo la seguente:

Definizione 2.3.5. Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, e siano

$$U \subseteq V, \quad W \subseteq V$$

due suoi sottospazi vettoriali. Il **sottospazio vettoriale somma** $U + W$ è così definito:

$$U + V := \{v \in V \mid \exists u \in U, \exists w \in W, \text{ tali che } v = u + w\},$$

è dato cioè da tutte le possibili somme di vettori di U con vettori di W.

Lemma 2.3.6. *Il sottospazio somma $U + W \subseteq V$ è un sottospazio vettoriale.*

Inoltre, $U + W$ è il più piccolo sottospazio vettoriale contenente $U \cup W$.

Dimostrazione. Esercizio. □

2.4 Combinazioni lineari e sottospazi vettoriali finitamente generati

Definizione 2.4.1. Dati $v_1, \dots, v_k \in V$, una **combinazione lineare** di $v_1, \dots, v_k$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un vettore del tipo

$$c_1 v_1 + \cdots + c_k v_k \in V, \quad c_1, \dots, c_k \in \mathbb{K}.$$

Definizione 2.4.2. Se $v_1, \dots, v_k \in V$ è un numero finito di vettori di V, definiamo

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k) := \{a_1 \cdot v_1 + \dots a_k \cdot v_k \mid a_1, \dots, a_k \in \mathbb{K}\},$$

che risulta un sottospazio vettoriale (verificare per esercizio).

Esempio 2.4.3.

- Sia V uno spazio vettoriale non banale, e sia $v \in V$ un vettore non nullo: $v \neq 0$. Allora

  $$\mathrm{Span}(v) = \{c \cdot v \mid c \in \mathbb{K}\},$$

  consiste cioè di tutti i vettori proporzionali a v. Il sottospazio vettoriale $\mathrm{Span}(v)$ viene chiamato **retta vettoriale**, e il vettore v viene chiamato **generatore**.

- Sia V uno spazio vettoriale non banale e siano $v, w \in V$ due vettori non nulli: $v \neq 0$, $w \neq 0$. Allora

  $$\mathrm{Span}(v, w) = \{a \cdot v + b \cdot w \mid a \in \mathbb{K}, b \in \mathbb{K}\},$$

  consiste cioè di tutte le possibili somme di vettori proporzionali a v e w.

  Nel caso che w non sia proporzionale a v, $\mathrm{Span}(v, w)$ viene chiamato **piano vettoriale**. Nel caso che w sia invece proporzionale a v, si può verificare facilmente che vale

  $$w = c \cdot v \Rightarrow \mathrm{Span}(v, w) = \mathrm{Span}(v) = \mathrm{Span}(w),$$

  quindi si ottiene nuovamente una retta vettoriale.

Osservazione 7. Osserviamo, in particolare, che i vettori $v_1, \dots, v_k \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k)$; infatti, si ha

$$v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k, v_2 = 0 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + \cdots + 0 \cdot v_k, \dots,$$
$$v_k = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \cdots + 1 \cdot v_k.$$

Inoltre, per ogni $l < k$, abbiamo

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subseteq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k).$$

Infatti, ogni $v \in \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l)$ soddisfa

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_l \cdot v_l,$$

e tale relazione si può riscrivere nella forma:

$$v = c_1 \cdot v_1 + c_2 \cdot v_2 + \cdots + c_l \cdot v_l + 0 \cdot v_{l+1} + \cdots + 0 \cdot v_k,$$

quindi v è anche combinazione lineare di $v_1, \dots, v_k$.

Notiamo, però, che $l < k$ non implica, in generale,

$$\mathrm{Span}(v_1, \dots, v_l) \subsetneq \mathrm{Span}(v_1, \dots, v_k),$$

come ad esempio nel seguente caso:

$$\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^2.$$

Esempi 2.4.4. • Consideriamo i vettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Osserviamo che il vettore $w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ si puó scrivere come combinazione lineare di v_1 e v_2:

$$w = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = v_1 - 2v_2,$$

quindi $w \in \mathrm{Span}(v_1, v_2)$.

Definizione 2.4.5. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e siano

$$v_1, \ldots, v_k \in V$$

vettori di V. Diremo che $v_1, \ldots, v_k$ **generano** V se

$$V = \mathrm{Span}\,(v_1, \ldots, v_k),$$

e quindi per ogni vettore $v \in V$ esistono dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ tali che

$$v = \lambda_1\, v_1 + \cdots + \lambda_k\, v_k.$$

In questo caso V si dirà **finitamente generato**.

2.5 Dipendenza e indipendenza lineare

Definizione 2.5.1. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$; essi si dicono **linearmente dipendenti** se uno di loro si può scrivere come combinazione lineare degli altri.

Esempio 2.5.2. I vettori di $\mathbb{R}^2$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ v_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sono linearmente dipendenti, perché $v_3 = 2v_1 + v_2$, ma v_1 e v_2 non sono linearmente dipendenti, e nemmeno v_1 e v_3, così come v_2 e v_3 non sono linearmente dipendenti (verificare).

Definizione 2.5.3. Siano $v_1, \ldots, v_k \in V$; essi si dicono **linearmente indipendenti** se non sono linearmente dipendenti.

La dipendenza e l'indipendenza lineari possono essere caratterizzate nel modo seguente, che può essere scelto come definizione alternativa:

Proposizione 2.5.4. *I vettori $v_1, \ldots, v_k \in V$ sono linearmente dipendenti $\iff$ esiste una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli che dia il vettore nullo:*

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_k v_k = 0, \quad a_i \text{ non tutti nulli.}$$

Conseguentemente abbiamo:

Proposizione 2.5.5. *I vettori* $v_1, \ldots, v_k \in V$ *sono linearmente indipendenti* $\iff$ *l' unica loro combinazione lineare che dia il vettore nullo è quella con tutti i coefficienti nulli:*

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_kv_k = 0 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0.$$

Osservazione 8.

1. Nel caso $k = 1$, abbiamo che un vettore v_1 è linearmente dipendente $\iff$ esiste una combinazione lineare

   $$a_1v_1 = 0,$$

   con $a_1 \neq 0$, cioè $\iff$ $v_1 = 0$ è il vettore nullo.

   Conseguentemente, v_1 è linearmente indipendente $\iff$ $v_1 \neq 0$.

2. Due vettori v_1 e v_2 sono linearmente dipendenti $\iff$ esiste $c \in \mathbb{K}$ tale che

   $$v_2 = cv_1, \quad \text{oppure } v_1 = cv_2,$$

   cioè $\iff$ v_1 e v_2 sono **proporzionali**.

   Come conseguenza, due vettori v_1 e v_2 sono linearmente indipendenti $\iff$ non sono proporzionali.

3. Consideriamo dei vettori $v_1, \ldots, v_k$ e supponiamo che uno di essi sia nullo:

   $$v_i = 0.$$

   Allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti si ha

   $$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + 0 \cdot v_k = 0$$

   è una loro combinazione lineare con coefficienti non tutti nulli, che dà il vettore nullo.

4. Se tra i vettori $v_1, \ldots, v_k$ ce ne sono due uguali

   $$v_i = v_j,$$

   allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente dipendenti; infatti, la combinazione lineare

   $$0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_j + \cdots + 0 \cdot v_k =$$

   $$= 0 \cdot v_1 + \cdots + 1 \cdot v_i + \cdots + (-1)v_i + \ldots 0 \cdot v_k = 0$$

   dà luogo al vettore nullo e non tutti i coefficienti sono nulli.

2.6 Basi

Abbiamo osservato che quando uno dei vettori considerati è combinazione lineare degli altri, esso è irrilevante ai fini dello spazio generato. È quindi naturale cercare di considerare solo insiemi *minimali* di generatori, cioè insiemi in cui togliendo un qualunque vettore, lo spazio generato dai rimanenti è strettamente più piccolo. Queste considerazioni inducono a dare la seguente definizione.

Definizione 2.6.1. Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme di vettori

$$\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$$

si dice **base di** V (finita) se valgono le seguenti:

1. (B1) $v_1, \ldots, v_n$ generano V;
2. (B2) $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti.

Proposizione 2.6.2. *Un sottoinsieme $\{v_1, \ldots, v_n\}$ di V è una base di V se e solo se per ogni ettore $v \in V$, esistono e sono unici dei coefficienti $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ tali che*

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

In tal caso gli scalari $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ si chiamano **coordinate di** v **nella base** $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Dimostrazione. Sia $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base di V. Poiché sono dei generatori di V, ogni vettore $v \in V$ si può scrivere come combinazione lineare

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Supponiamo che si abbia anche

$$v = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_n v_n.$$

Sottraendo la seconda equazione alla prima otteniamo

$$0 = (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) v_n.$$

Essendo $\{v_1, \ldots, v_n\}$ una base, i vettori sono anche linearmente indipendenti, quindi si ha

$$\lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n,$$

da cui la tesi.

Viceversa, supponiamo che ogni vettore di V si possa esprimere in modo unico nella forma

$$v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n.$$

Da ciò segue, in particolare, che i vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$ formano un insieme di generatori di V.

Mostriamo infine che sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n = 0.$$

Siccome il vettore nullo ammette la rappresentazione

$$0 = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n,$$

per l'ipotesi di unicità della rappresentazione di ogni vettore come combinazione lineare dei vettori $\{v_1, \ldots, v_n\}$, si ha che necessariamente

$$c_1 = 0, \ldots, c_n = 0,$$

quindi $v_1, \ldots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti, e formano una base. $\square$

Esempio 2.6.3. Sia $V = \mathbb{K}^n$. Allora si ha una base naturale, detta **base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{K}^n$:**

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Infatti, i vettori di $\mathcal{E}$ formano un insieme di generatori; dato un vettore

$$v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

arbitrario, esso si esprime come combinazione lineare nel modo seguente:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + b_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + b_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Inoltre, si può verificare facilmente che i vettori di $\mathcal{E}$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 9. Sottolineiamo nell' esempio precedente che nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{K}^n$ le **coordinate di un vettore coincidono con le sue componenti**.