

Capitolo 3

Matrici

3.1 Matrici: prime definizioni

Definizione 3.1.1. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e sia mK un campo. Una **matrice** $m \times n$ **a coefficienti in** \mathbb{K} è una tabella rettangolare di $m \cdot n$ elementi di \mathbb{K} del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

dove $a_{ij} \in \mathbb{K}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$.

Verrà usate anche la seguente notazione per denotare una matrice:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}.$$

Per ogni $i = 1, \dots, m$, la **riga i -esima** di A è la matrice $1 \times n$

$$A_{(i)} = (a_{i1} \ a_{i2} \ \dots \ a_{in}).$$

Per ogni $j = 1, \dots, n$, la **colonna j -esima** di A è la matrice $m \times 1$

$$A^{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$$

L'elemento a_{ij} è detto **elemento di posto** i, j ; tale elemento verrà indicato anche con

$$(A)_{ij}.$$

Osserviamo, infine, che i è l'indice di riga e j l'indice di colonna.

Definizione 3.1.2. Se $m = n$, cioè il numero di righe è uguale al numero di colonne, la matrice si dice **matrice quadrata di ordine n** .

Definizione 3.1.3. L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} si denota con $M_{m,n}(\mathbb{K})$. L'insieme delle matrici quadrate di ordine n a coefficienti in \mathbb{K} si denota con $M_n(\mathbb{K})$.

Definizione 3.1.4. Siano $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, e sia $c \in \mathbb{K}$. La **somma** di A e B si definisce come la matrice $A + B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è $a_{ij} + b_{ij}$ per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$; possiamo scrivere:

$$(A + B)_{ij} = (A)_{ij} + (B)_{ij}.$$

Il **prodotto di A per lo scalare c** è la matrice $c \cdot A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è dato da $c \cdot a_{ij}$, per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

Proposizione 3.1.5. $M_{m,n}(\mathbb{K})$ con le operazioni di somma e prodotto per scalari definite sopra, è uno spazio vettoriale sul campo \mathbb{K} . Il vettore nullo è la matrice nulla, cioè la matrice con $0 \in \mathbb{K}$ al posto i, j , per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e $j \in \{1, \dots, n\}$.

Dimostrazione. Esercizio. □

Esempio 3.1.6. Una base per lo spazio vettoriale delle matrici $M_{m,n}(\mathbb{K})$ è data da

$$E_{11} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, E_{12} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \dots, E_{mn} := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

ovvero dalle matrici E_{ij} che hanno il coefficiente 1 nella posizione i, j e zero altrove.

Infatti, ogni matrice $A = (a_{ij})$ si può scrivere in modo unico come

$$A = a_{11}E_{11} + a_{12}E_{12} + \dots + a_{mn}E_{mn} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}E_{ij}.$$

Anche questa base viene detta **base canonica dello spazio delle matrici**.

Osservazione 10. Analogamente agli spazi \mathbb{R}^n possiamo definire gli spazi

$$\mathbb{K}^n = \left\{ \left(\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K} \right) \right\},$$

detto **prodotto cartesiano** del campo \mathbb{K} per se stesso n volte. I suoi elementi sono sequenze ordinate di n scalari di \mathbb{K} .

Come nel caso reale, in \mathbb{K}^n possiamo definire una somma e una moltiplicazione per uno scalare, che lo rendono uno spazio vettoriale su \mathbb{K} :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 + d_1 \\ c_2 + d_2 \\ \vdots \\ c_n + d_n \end{pmatrix},$$

$$a \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a c_1 \\ a c_2 \\ \vdots \\ a c_n \end{pmatrix}$$

Osservazione 11. Possiamo vedere gli elementi di \mathbb{K}^n come matrici $n \times 1$ a coefficienti in \mathbb{K} . Sotto questa identificazione, le operazioni di somma e prodotto per scalari definite in \mathbb{K}^n coincidono con quelle di $M_{n,1}(\mathbb{K})$, quindi possiamo identificare

$$\mathbb{K}^n = M_{n,1}(\mathbb{K})$$

come spazi vettoriali.

3.2 Matrice trasposta

Definizione 3.2.1. Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. La **matrice trasposta di A** è la matrice

$${}^t A \in M_{n,m}(\mathbb{K})$$

il cui elemento di posto i, j è l'elemento di posto j, i di A , per ogni $i \in \{1, \dots, n\}$ e $j \in \{1, \dots, m\}$, ovvero:

$$({}^t A)_{ij} = (A)_{ji}.$$

Proposizione 3.2.2. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$. Allora si ha:

1. ${}^t(A + B) = {}^t A + {}^t B$;
2. ${}^t({}^t A) = A$.

Dimostrazione. 1. Dimostriamo che per ogni $i \in \{1, \dots, m\}$ e per ogni $j \in \{1, \dots, n\}$, gli elementi di posto i, j di ${}^t(A + B)$ e di ${}^t A + {}^t B$ coincidono; si ha:

$$({}^t(A + B))_{ij} = (A + B)_{ji} = (A)_{ji} + (B)_{ji};$$

inoltre:

$$({}^t A + {}^t B)_{ij} = ({}^t A)_{ij} + ({}^t B)_{ij} = (A)_{ji} + (B)_{ji},$$

quindi l'uguaglianza della tesi vale.

2. Si ha

$$({}^t({}^t A))_{ij} = ({}^t A)_{ji} = (A)_{ij},$$

quindi l'uguaglianza è verificata. □

Definizione 3.2.3. Sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$. La **diagonale principale** è quella parte di A composta dagli elementi di posto i, i , per ogni $i = 1, \dots, n$.

A è detta **diagonale** se $a_{ij} = 0$ per ogni $i \neq j$.

A è **simmetrica** se $A = {}^t A$.

La **matrice unità** $n \times n$ è la matrice $\mathbb{I}_n \in M_n(\mathbb{K})$ il cui elemento di posto i, j è dato da 1 se $i = j$ e 0 se $i \neq j$. Useremo spesso il **simbolo di Kronecker** δ_{ij} così definito:

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

La matrice unità ha quindi al posto i, j l'elemento δ_{ij} .

3.3 Il prodotto righe per colonne

Definizione 3.3.1. Siano

$$A = (a_{11} \ a_{12} \ \dots \ a_{1n}) \in M_{1,n}(\mathbb{K}), \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Il **prodotto** $A \cdot B$ è lo scalare definito come segue:

$$A \cdot B = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} \in \mathbb{K}.$$

Più in generale, se $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, il **prodotto righe per colonne**

$$A \cdot B \in M_{m,p}(\mathbb{K})$$

è quella matrice $m \times p$ il cui elemento di posto i, j è dato dal prodotto della i -esima riga di A e la j -esima colonna di B :

$$(A \cdot B)_{ij} = A_{(i)} \cdot B^{(j)} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}.$$

Notiamo che nel prodotto righe per colonne, il numero delle colonne della matrice a sinistra A deve coincidere con il numero delle righe della matrice a destra B .

Osservazione 12. Osserviamo che se A e B sono matrici quadrate dello stesso ordine:

$$A, B \in M_n(\mathbb{K}),$$

è sempre possibile moltiplicare $A \cdot B$, ma in generale si ha $A \cdot B \neq B \cdot A$; si vedano gli esercizi assegnati per esempi e controesempi.

Proposizione 3.3.2. 1. Siano $A, B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $C, D \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $c \in \mathbb{K}$. Allora valgono le seguenti uguaglianze:

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, \quad A \cdot (C + D) = A \cdot C + A \cdot D,$$

$$A \cdot (c \cdot C) = c \cdot (A \cdot C) = (c \cdot A) \cdot C, \quad A \cdot \mathbb{I}_n = \mathbb{I}_m \cdot A = A.$$

2. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$, $C \in M_{p,q}(\mathbb{K})$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

3. Siano $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in M_{n,p}(\mathbb{K})$. Allora vale la seguente uguaglianza:

$${}^t(A \cdot B) = {}^t B \cdot {}^t A.$$

Dimostrazione. Dimostriamo solo l'uguaglianza 3). Si ha

$$\begin{aligned} ({}^t(A \cdot B))_{ij} &= (A \cdot B)_{ji} = A_{(j)} \cdot B^{(i)} = \\ &= a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}. \end{aligned}$$

D'altra parte si ha

$$({}^t B \cdot {}^t A)_{ij} = ({}^t B)_{(i)} \cdot ({}^t A)^{(j)} = b_{1i}a_{j1} + b_{2i}a_{j2} + \cdots + b_{ni}a_{jn} = a_{j1}b_{1i} + a_{j2}b_{2i} + \cdots + a_{jn}b_{ni}.$$

□

3.4 Matrice inversa

Definizione 3.4.1. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice invertibile, se esiste una matrice quadrata dello stesso ordine $M \in M_n(\mathbb{K})$ tale che sono verificate le seguenti uguaglianze:

$$A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

Proposizione 3.4.2. Sia data una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$.

1. Se A è invertibile, allora esiste un' unica matrice $M \in M_n(\mathbb{K})$, tale che $A \cdot M = M \cdot A = \mathbb{I}_n$. Tale M si dice **matrice inversa di A** e si indica con A^{-1} .
2. Se A è invertibile e $M \in M_n(\mathbb{K})$ è tale che

$$A \cdot M = \mathbb{I}_n,$$

allora $M = A^{-1}$.

Lo stesso vale se $M \cdot A = \mathbb{I}_n$.

3. Se $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ sono invertibili, allora anche $A \cdot B$ è invertibile, e

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Dimostrazione. 1. Se esistesse un' altra $N \in M_n(\mathbb{K})$ tale che $A \cdot N = N \cdot A = \mathbb{I}_n$. Allora sfruttando il fatto che $N \cdot \mathbb{I}_n = N$, che $\mathbb{I}_n = A \cdot M$, la proprietà associativa del prodotto righe per colonne, e che $\mathbb{I}_n \cdot M = M$, abbiamo:

$$N = N \cdot \mathbb{I}_n = N \cdot (A \cdot M) = (N \cdot A) \cdot M = \mathbb{I}_n \cdot M = M,$$

quindi le due matrici sono uguali.

2. Dobbiamo dimostrare che anche $M \cdot A = \mathbb{I}_n$. Ma siccome A è invertibile, esiste la sua inversa A^{-1} . Quindi

$$M \cdot A = \mathbb{I}_n \cdot M \cdot A = (A^{-1} \cdot A) \cdot M \cdot A = A^{-1} \cdot (A \cdot M) \cdot A = A^{-1} \cdot \mathbb{I}_n \cdot A = A^{-1} \cdot A = \mathbb{I}_n.$$

3. È sufficiente osservare che

$$(A \cdot B) \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = \mathbb{I}_n,$$

e che $B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot (A \cdot B) = \mathbb{I}_n$.

□

Osservazione 13. Notiamo che $A \neq 0$ non implica che A sia invertibile. Si consideri ad esempio la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che A non è invertibile. Infatti, se esistesse

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

tale che $A \cdot M = \mathbb{I}_2$, allora si avrebbe

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ a + b = 0 \\ c + d = 0 \\ c + d = 1, \end{cases}$$

ma il sistema non ha soluzione.