Capitolo 4

Sistemi lineari

4.1 Sistemi di equazioni lineari

Siano $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, e sia $\mathbb{K}$ un campo.

Definizione 4.1.1.

- Un **sistema di** m **equazioni lineari a coefficienti in** $\mathbb{K}$ **in** n **incognite** è un sistema di equazioni della seguente forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

  dove $a_{11}, a_{12}, \dots, a_{mn} \in \mathbb{K}$ sono i **coefficienti**, $x_1, \dots, x_n$ sono le **incognite**, n è l' **ordine**, $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{K}$ sono i **termini noti**, del sistema lineare.

- Una **soluzione** del sistema lineare è una n-upla ordinata (vettore colonna)

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

  tale che, se si sostituisce ad x_i il valore $s_i \in \mathbb{K}$, per ogni $i = 1, \dots, n$, le m equazioni sono simultaneamente soddisfatte.

- Il sistema lineare si dice **omogeneo**, rispettivamente **non omogeneo**, se

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0,$$

  rispettivamente se $b_j \neq 0$, per qualche $j = 1, \dots, m$.

- Il sistema lineare si dice **compatibile** (rispettivamente **incompatibile**), se possiede una soluzione (rispettivamente, se non ha alcuna soluzione).

Osservazione 14. Ogni sistema lineare omogeneo è compatibile, infatti il vettore nullo

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$$

è una sua soluzione, detta soluzione banale. Ogni altra soluzione si dice soluzione non banale.

Esempio 4.1.2. 1. Il sistema lineare di ordine 2

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$$

è incompatibile.

2. Il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 1 \\ x_1 + x_2 & = 0 \end{cases}$$

è compatibile ed ammette l'unica soluzione $s = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

3. Il sistema lineare

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 & = 1 \\ 4x_1 + 6x_2 & = 2 \end{cases}$$

è compatibile ed ammette infinite soluzioni date da $s = \begin{pmatrix} \frac{1-3t}{2} \\ t \end{pmatrix}$; per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$, otteiamo una soluzione del sistema.

Definizione 4.1.3. La **matrice dei coefficienti** del sistema lineare

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m, \end{cases}$$

è la matrice A di tipo $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$, il cui elemento di posto ij è il coefficiente a_{ij} del sistema lineare, per ogni $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, cioè

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Il **vettore dei termini noti** è il vettore colonna

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Osserviamo che se mettiamo le incognite in colonna

$$X := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

allora il precedente sistema lineare si può scrivere nella seguente forma:

$$A \cdot X = b,$$

dove A è la matrice dei coefficienti, b il vettore dei termini noti, ed il prodotto è il prodotto righe per colonne.

La **matrice completa** associata al precedente sistema lineare è la matrice

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}.$$

Teorema 4.1.4. di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari omogenei *Sia $A \cdot X = 0$ un sistema lineare omogeneo di ordine n a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni coppia di soluzioni*

$$s, s' \in \mathbb{K}^n$$

di $A \cdot X = 0$ e per ogni scalare

$$c \in \mathbb{K},$$

si ha che

$$s + s', \quad cs \in \mathbb{K}^n$$

sono soluzioni di $A \cdot X = 0$.

In particolare, l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $A \cdot X = 0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ (per la definizione di sottospazio vettoriale si veda il prossimo capitolo).

Dimostrazione. Siccome $s, s' \in \mathbb{K}^n$ sono soluzioni del sistema lineare omogeneo in considerazione, si ha che $A \cdot s = 0$ ed $A \cdot s' = 0$. Dobbiamo provare che $A \cdot (s + s') = 0$ e che $A \cdot (cs) = 0$.

Per la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne sulla somma di matrici (in questo caso s, s' sono vettori colonna, quindi si possono considerare come matrici di tipo $n \times 1$), si ha che

$$A \cdot (s + s') = A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0.$$

Segue che $s + s' \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo.

Per dimostrare che $A \cdot (cs) = 0$, basta osservare che il prodotto per scalari commuta con il prodotto tra matrici, quindi

$$A \cdot (cs) = cA \cdot s = c0 = 0.$$

□

Teorema 4.1.5. di struttura per le soluzioni dei sistemi lineari *Sia $A \cdot X = b$ un sistema lineare di ordine n, e sia $\widetilde{s} \in \mathbb{K}^n$ una sua soluzione.*

Allora $s \in \mathbb{K}^n$ è soluzione del sistema lineare, se e solo se

$$s = \widetilde{s} + s_0,$$

dove $s_0 \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot X = 0$.

Dimostrazione. Sia $s \in \mathbb{K}^n$ una soluzione arbitraria del sistema lineare $A \cdot X = b$. Osserviamo che

$$s = \widetilde{s} + (s - \widetilde{s}),$$

quindi basta verificare che $s - \widetilde{s}$ è soluzione del sistema lineare omogeneo associato $A \cdot X = 0$. Sfruttando la proprietà distributiva del prodotto righe per colonne tra matrici si ha

$$A \cdot (s - \widetilde{s}) = A \cdot s + A \cdot (-\widetilde{s}) = A \cdot s - A \cdot (\widetilde{s}) = b - b = 0,$$

dove nella seconda uguaglianza abbiamo sfruttato il fatto che $-\widetilde{s} = (-1)\widetilde{s}$ e la commutatività del prodotto righe per colonne con il prodotto per scalari.

Viceversa, per ogni soluzione $s_0 \in \mathbb{K}^n$ del sistema lineare omogeneo associato, $\widetilde{s} + s_0$ è una soluzione del sistema lineare, poiché

$$A \cdot (\widetilde{s} + s_0) = A \cdot \widetilde{s} + A \cdot s_0 = b + 0 = b.$$

□

4.2 Sistemi lineari con matrici dei coefficienti a scala

Definizione 4.2.1. Sia $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia $r \in \{0, 1, \ldots, m\}$ il numero delle righe di A diverse dalla riga nulla. La matrice A è detta **a scala** se:

- $r = 0$ (quindi A è la matrice nulla),
- oppure $r > 0$, $A_{(i)} \neq (0\,0 \ldots 0)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, r\}$ e, posto

  $$j_i = \min\{j \mid a_{ij} \neq 0\},$$

  si ha che $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$.

  Se A è a scala, gli elementi $a_{1j_1}, \ldots, a_{rj_r}$ si dicono i **pivot** di A.

Proposizione 4.2.2. *Sia $A \cdot X = b$ un sistema lineare di ordine n, formato da m equazioni, a coefficienti in $\mathbb{K}$. Supponiamo che $A \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ sia una matrice a scala, e sia $r \in 0, \ldots, m$ il numero di righe non nulle di A.*

Allora il sistema lineare $A \cdot X = b$ è compatibile $\iff$

$$b_{r+1} = b_{r+2} = \cdots = b_m = 0.$$

Dimostrazione. Dimostriamo l' implicazione $\Rightarrow$:

Per ipotesi il sistema lineare $A \cdot X = b$ è compatibile, quindi ha una soluzione

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$$

per cui vale $A \cdot s = b$. In particolare, per ogni $i = 1, \dots, m$, la componente i-esima del vettore $A \cdot s \in \mathbb{K}^n$ è data dal prodotto (righe per colonne) della i-esima riga di A per s, cioè $A_{(i)} \cdot s$.

Sia ora $i > r$; per definizione di r abbiamo che

$$A_{(i)} \cdot s = 0,$$

perció $b_i = 0$.

Implicazione $\Leftarrow$:

Supponiamo che $b_i = 0$ per ogni $i > r$, e dimostriamo che è sempre possibile trovare una soluzione del sistema lineare $A \cdot X = b$. A tale scopo, procediamo risolvendo tutte le equazioni partendo dall' ultima equazione ed andando a ritroso.

Precisamente, le equazioni dalla $(r+1)$-esima alla m-esima sono tutte del tipo $0 = 0$, quindi sono soddisfatte per ogni scelta di $s_1, \dots, s_n \in \mathbb{K}$,ponendo $x_1 = s_1, \dots, x_n = s_n$. L' equazione r-esima è della forma seguente:

$$a_{r,j_r} x_{j_r} + a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} + \cdots + a_{r,n} x_n = b_r.$$

Siccome $a_{r,j_r} \neq 0$, essendo l' r-esimo pivot di A, possiamo ricavare x_{j_r} in funzione di $x_{j_r+1}, x_{j_r+2}, \dots, x_n$, ed otteniamo:

$$x_{j_r} = \frac{1}{a_{r,j_r}} (b_r - a_{r,j_r+1} x_{j_r+1} - \cdots - a_{r,n} x_n).$$

Quindi, per ogni $s_1, \dots, s_{j_r-1} \in \mathbb{K}$ e per ogni $s_{j_r+1}, \dots, s_n \in \mathbb{K}$, otteniamo una soluzione della equazione r-esima del sistema lineare ponendo

$$x_1 = s_1, \dots, x_{j_r-1} = s_{j_r-1}, \dots, x_n = s_n \in \mathbb{K}, x_{j_r} = \frac{1}{a_{r,j_r}} (b_r - a_{r,j_r+1} s_{j_r+1} - \cdots - a_{r,n} s_n).$$

Ora consideriamo l' equazione $(r-1)$-esima. Essa è della forma seguente:

$$a_{r-1,j_{r-1}} x_{j_{r-1}} + a_{r-1,j_{r-1}+1} x_{j_{r-1}+1} + \cdots + a_{r-1,n} x_n = b_{r-1}.$$

Dividendo ambo i membri per $a_{r-1,j_{r-1}}$, che è $\neq 0$, ricaviamo $x_{j_{r-1}}$ in funzione di $x_{j_{r-1}+1}, \dots, x_n$. Quindi, sostituendo ad x_{j_r} il valore determinanto in precedenza, vediamo che è possibile trovare degli scalari $s_1, s_2, \dots, s_n \in \mathbb{K}$, tali che $s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$ sia simultaneamente soluzione delle equazioni dalla $(r-1)$-esima alla m-esima del sistema lineare. Procedendo in questo modo vediamo che il sistema lineare $A \cdot X = b$ ha (almeno) una soluzione e quindi è compatibile.

$\square$

4.3 Il metodo di gradinizzazione di Gauß

Definizione 4.3.1. Due sistemi lineari dello stesso ordine sono **equivalenti** se hanno le stesse soluzioni.

Il metodo di Gau, per stabilire la compatibilità ed eventualmente per trovare le soluzioni di un sistema lineare $A \cdot X = b$, consiste nel trasformare tale sistema in uno ad esso equivalente $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$, con matrice dei coefficienti $\widetilde{A}$ a scala. Quindi si stabilisce la compatibilità di $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$, ed eventualmente se ne trovano le soluzioni, tramite la Proposizione 4.2.2. Per trasformare $A \cdot X = b$ in $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$ si effettuano in modo opportuno le cosiddette **operazioni elementari**.

1. OE1 **Operazione elementare 1 (OE1)**. Questa operazione consiste nello scambio di due equazioni tra di loro. Nella pratica, per risolvere un dato sistema lineare, sarà spesso più comodo effettuare le operazioni elementari direttamente sulla matrice completa $(A \mid b)$. In tal caso la OE1 consiste nello scambio di due righe di $(A \mid b)$ tra di loro.

2. OE2 **Operazione elementare 2 (OE2)**. Questa operazione consiste nella moltiplicazione di ambo i membri di una equazione per uno stesso scalare non nullo. La corrispondente operazione sulla matrice completa $(A \mid b)$ consiste nella moltiplicazione di una sua riga per uno scalare non nullo.

3. OE3 **Operazione elementare 3 (OE3)**. Con questa operazione si sostituisce una equazione con l' equazione che si ottiene sommando ad essa un multiplo di un' altra equazione. La corrispondente operazione sulla matrice completa $(A \mid b)$ consiste nel sostituire una sua riga, ad esempio $(A \mid b)_{(i)}$, con la somma $(A \mid b)_{(i)} + c(A \mid b)_{(j)}$, per qualche $j \neq i$ e $c \in \mathbb{K}$.

Proposizione 4.3.2. *Le operazioni elementari 1, 2 e 3 trasformano un dato sistema lineare in uno ad esso equivalente.*

Dimostrazione. Sia $A \cdot X = b$ un dato sistema lineare di ordine n, con m equazioni, a coefficienti in $\mathbb{K}$. Chiaramente scambiando l' ordine delle sue equazioni, si ottiene un sistema lineare equivalente ad esso. Lo stesso vale se si moltiplica ambo i membri di una equazione per uno scalare non nullo.

Consideriamo quindi l' OE3, e precisamente sostituiamo l' equazione i-esima di $A \cdot X = b$ con l' equazione che si ottiene sommando ad essa c-volte l' equazione j-esima, per qualche $c \in \mathbb{K}$ e per qualche $j \neq i$. Denotiamo con $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$ il sistema lineare che si ottiene in questo modo. Ricordiamo che, per ogni $k = 1, \ldots, m$, la k-esima equazione di $A \cdot X = b$ si può scrivere come segue: $A_{(k)} \cdot X = b_k$, dove $A_{(k)}$ è la k-esima riga di A, b_k è la k-esima componente di $b \in \mathbb{K}^m$, ed il prodotto è quello righe per colonne. Analogamente la k-esima equazione di $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$ si scrive come $\widetilde{A}_{(k)} \cdot X = \widetilde{b}_k$, dove

$$\widetilde{A}_{(k)} = \begin{cases} A_{(k)}, & \text{se } k \neq i, \\ A_{(i)} + cA_{(j)}, & \text{se } k = i, \end{cases} \qquad \widetilde{b}_k = \begin{cases} b_k, & \text{se } k \neq i, \\ b_i + cb_j, & \text{se } k = i, \end{cases}$$

Dimostriamo ora che $A \cdot X = b$ e $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$ sono equivalenti. Sia $s \in \mathbb{K}^n$ una soluzione di $A \cdot X = b$; abbiamo quindi

$$A_{(k)} \cdot s = b_k, \ \forall k = 1, \ldots, m.$$

Quindi

$$\widetilde{A}_{(k)} \cdot s = \widetilde{b}_k, \ \forall k \neq i,$$

e per $k = i$

$$\widetilde{A}_{(i)} \cdot s = (A_{(i)} + cA_{(j)}) \cdot s = A_{(i)} \cdot s + cA_{(j)} \cdot s = b_i + cb_j = \widetilde{b}_i.$$

Ne segue che s è soluzione di $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$.

Viceversa, se $s \in \mathbb{K}^n$ è una soluzione di $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$, allora

$$\widetilde{A}_{(k)} \cdot s = \widetilde{b}_k, \ \forall k = 1, \dots, m.$$

Quindi

$$A_{(k)} \cdot s = b_k, \ \forall k \neq i,$$

e per $k = i$

$$A_{(i)} \cdot s = (\widetilde{A}_{(i)} - c\widetilde{A}_{(j)}) \cdot s = \widetilde{A}_{(i)} \cdot s - c\widetilde{A}_{(j)} \cdot s = \widetilde{b}_i - c\widetilde{b}_j = b_i.$$

Ne segue che s è soluzione di $A \cdot X = b$, ed i due sistemi lineari sono equivalenti. □

Teorema 4.3.3. *Sia dato un sistema lineare $A \cdot X = b$. È sempre possibile trasformare $A \cdot X = b$, per mezzo delle operazioni elementari, in uno ad esso equivalente, $\widetilde{A} \cdot X = \widetilde{b}$, con matrice dei coefficienti $\widetilde{A}$ a scala.*

Dimostrazione. Sia n il numero di incognite e sia m il numero delle sue equazioni. Possiamo supporre $A \neq 0$, altrimenti A è già a scala. Sia quindi $j \in \{1, \dots, n\}$ il più piccolo indice di colonna tale che $A^{(j)} \neq 0 \in \mathbb{K}^m$, e sia $i \in \{1, \dots, m\}$ un indice di riga tale che $a_{ij} \neq 0 \in \mathbb{K}$.

ALGORITMO DI GAUß

- Scambiando tra di loro la prima con la i-ma riga di $(A|b)$ (operazione OE1), possiamo supporre che sia

  $$a_{1j} \neq 0.$$

  Abbiamo quindi una matrice del tipo

  $$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & a_{2j} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} & | & b_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{mj} & a_{m,j+1} & \dots & a_{mn} & | & b_m \end{pmatrix}$$

- Per mezzo di una OE3, sostituiamo le righe di $(A|b)$ dalla seconda alla m-esima con

  $$(A|b)_{(k)} - \frac{a_{kj}}{a_{1j}}(A|b)_{(1)}, \ \forall k = 2, \dots, m$$

  e troviamo una matrice del tipo

  $$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_{1j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} & | & b_1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{2,j+1} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{m,j+1} & \dots & a'_{mn} & | & b'_m \end{pmatrix}$$

- Applichiamo i punti precedenti alla sottomatrice

  $$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a'_{2,j+1} & a'_{2,j+2} & \dots & a'_{2n} & | & b'_2 \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & | & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a'_{m,j+1} & a'_{m,j+2} & \dots & a'_{mn} & | & b'_m \end{pmatrix}.$$

Alla fine del procedimento troviamo una matrice $(\widetilde{A}|\widetilde{b})$ a scala. □

Osservazione 15. Nel caso in cui $V = \mathbb{K}^n$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \ldots, v_k$ sono dei generatori per $\mathbb{K}^n$ studiando un sistema lineare. Più precisamente, se esprimiamo i vettori $v_1, \ldots, v_k$ in componenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \ldots, \qquad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

allora un vettore $v = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è una loro combinazione lineare se si può scrivere come

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \cdots + c_k a_{1k} \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \cdots + c_k a_{2k} \\ \vdots \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \cdots + c_k a_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Se poniamo

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

abbiamo che v è combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_k$ se e solo se il sistema lineare

$$A \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ammette almeno una soluzione $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$, cioè se e solo se $A \cdot X = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ è compatibile.

Osservazione 16. Nel caso in cui $V = \mathbb{K}^n$, possiamo stabilire se k vettori $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti studiando un sistema omogeneo di equazioni lineari. Più precisamente, se esprimiamo i vettori $v_1, \dots, v_k$ in componenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \qquad \dots, \qquad v_k = \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix},$$

allora una loro combinazione lineare si può scrivere come

$$c_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 a_{11} + c_2 a_{12} + \dots + c_k a_{1k} \\ c_1 a_{21} + c_2 a_{22} + \dots + c_k a_{2k} \\ \vdots \\ c_1 a_{n1} + c_2 a_{n2} + \dots + c_k a_{nk} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}.$$

Se poniamo

$$A := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix},$$

abbiamo che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

ammette una soluzione non banale $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix}$.

Infine, possiamo equivalentemente affermare che $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$A \cdot X = 0$$

ammette solo la soluzione banale (la soluzione nulla).