Matrici e Immagini Digitali

Valentina Beorchia

DMG - Trieste

28 agosto 2023

Una notevole applicazione della teoria delle matrici è rappresentata dalle immagini digitali. Vediamo alcuni esempi preparati dal prof. Marino Zennaro, professore ordinario di Analisi Numerica, in occasione del suo intervento per il Circolo Matematico nel 2018:

https://circolomatematico.units.it/content/23-marzo-2018-matematica-e-immagini-digitali.

Le immagini digitali sono memorizzate sotto forma di una - scala di grigi - o tre - immagine a colori - tabelle numeriche rettangolari, ovvero matrici. Ad ogni colore viene assegnato un numero, a partire da

0 - **nero** a **255** - **bianco**

Le dimensioni delle matrici dipendono dalla risoluzione dell'immagine, ossia dal numero di pixel che la compongono.

Una modifica dei numeri contenuti nelle tabelle comporta una modifica corrispondente dell'immagine da esse rappresentata.

Sulla base di ciò, formule matematiche più o meno complicate vengono comunemente utilizzate per operare sulle immagini una svariata gamma di trasformazioni.

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	255	227	0	171	143	115	87	255	31	3
2	255	0	0	0	143	115	255	255	255	3
3	0	0	199	0	0	255	255	59	255	255
4	0	227	199	171	0	255	87	59	31	255
5	0	227	199	171	0	255	87	59	31	255
6	0	227	199	171	0	255	87	59	31	255
7	0	227	199	171	0	255	87	59	31	255
8	0	0	199	0	0	255	255	59	255	255
9	255	0	0	0	143	115	255	255	255	3
10	255	227	0	171	143	115	87	255	31	3

tabella numerica F ($m = 10$ *righe e* $n = 10$ *colonne*)

codifica a 8 bit ($2^8 = 256$ *tonalità*)*: da 0 (nero) a 255 (bianco)*

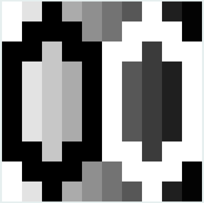


immagine corrispondente (ingrandita 60 volte)

$i \setminus j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	255 255 255	227 255 255	0 50 50	171 221 221	143 193 193	115 165 65	87 137 37	255 255 205	31 81 0	3 53 0
2	255 255 255	0 50 50	0 50 50	0 50 50	143 193 193	115 165 65	255 255 205	255 255 205	255 255 205	3 50 0
3	0 50 50	0 50 50	199 249 249	0 50 50	0 50 50	255 255 205	255 255 205	59 109 9	255 255 205	255 255 205
4	0 50 50	227 255 255	199 249 249	171 221 221	0 50 50	255 255 205	87 137 37	59 109 9	31 81 0	255 255 205
5	0 50 50	227 255 255	199 249 249	171 221 221	0 50 50	255 255 205	87 137 37	59 109 9	31 81 0	255 255 205
6	0 0 50	227 177 255	199 149 249	171 121 221	0 0 50	255 205 205	87 37 37	59 9 9	31 0 0	255 205 205
7	0 0 50	227 177 255	199 149 249	171 121 221	0 0 50	255 205 205	87 37 37	59 9 9	31 0 0	255 205 205
8	0 0 50	0 0 50	199 149 249	0 0 50	0 0 50	255 205 205	255 205 205	59 9 9	255 205 205	255 205 205
9	255 205 255	0 0 50	0 0 50	0 0 50	143 93 193	115 65 65	255 205 205	255 205 205	255 205 205	3 0 0
10	255 205 255	227 177 255	0 0 50	171 121 221	143 93 193	115 65 65	87 37 37	255 205 205	31 0 0	3 0 0

tabella numerica "tripla" (F_1, F_2, F_3) $(m = 10$ *e* $n = 10)$
codifica a 8 bit: tre numeri tra 0 e 255 per determinare colore e tonalità

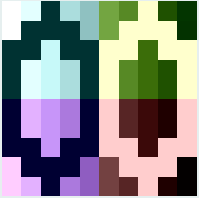


immagine corrispondente (ingrandita 60 volte)

Interpretazione della somma e della moltiplicazione per scalare

Sia A la matrice di tipo 10×10 associata a un'immagine. Sia B di tipo 10×10 e con tutte le entrate uguali a 255:

$$B = \begin{pmatrix} 255 & 255 & \dots & 255 \\ 255 & 255 & \dots & 255 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 255 & 255 & \dots & 255 \end{pmatrix}.$$

Se consideriamo la matrice

$$B + (-1) \cdot A = B - A,$$

otteniamo l'immagine "negativa", in cui i vari colori vengono sostituiti con i loro "opposti". Ad esempio, il bianco al posto del nero ed il nero al posto del bianco.

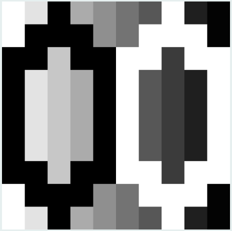
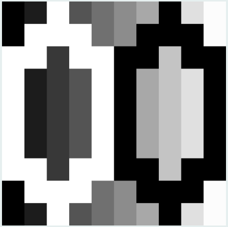


immagine corrispondente (ingrandita 60 volte)



"negativo" dell'immagine in scala di grigi dell'Esempio 1.1

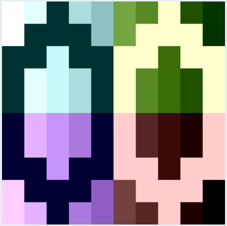
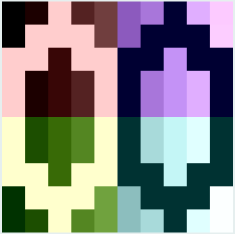
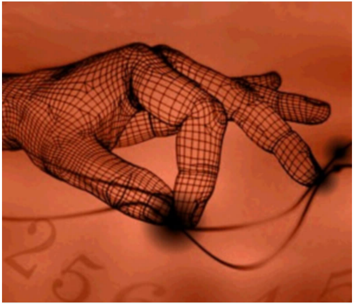


immagine corrispondente (ingrandita 60 volte)



"negativo" dell'immagine a colori dell'Esempio 1.2



Scegliamo un opportuno parametro intero $0 < \delta \leq 255$, e sia A la matrice di tipo 10×10 associata a un'immagine.
Consideriamo la matrice Δ di tipo 10×10 e con tutte le entrate uguali a δ:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta & \delta & \dots & \delta \\ \delta & \delta & \dots & \delta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta & \delta & \dots & \delta \end{pmatrix}.$$

La matrice $A + \Delta$ corrisponde all'operazione di

Scegliamo un opportuno parametro intero $0 < \delta \leq 255$, e sia A la matrice di tipo 10×10 associata a un'immagine.
Consideriamo la matrice Δ di tipo 10×10 e con tutte le entrate uguali a δ:

$$\Delta = \begin{pmatrix} \delta & \delta & \dots & \delta \\ \delta & \delta & \dots & \delta \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \delta & \delta & \dots & \delta \end{pmatrix}.$$

La matrice $A + \Delta$ corrisponde all'operazione di "schiarimento" in maniera uniforme.
Osserviamo che $A + \Delta$ potrebbe avere alcune entrate > 255; in questo caso poniamo tali entrate $= 255$.
Notiamo, infine, che per $\delta = 255$ otteniamo un'immagine completamente bianca.

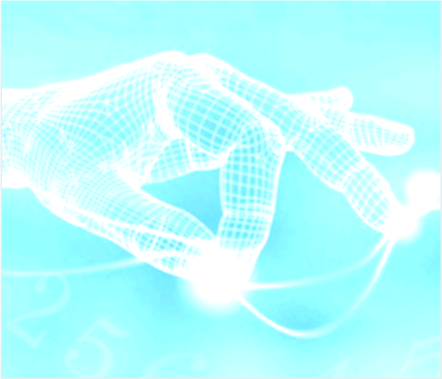


Immagine schiarita con $\delta = 100$

Analogamente possiamo "scurire" l'immagine considerando la matrice $A - \Delta$. In questo caso alcune delle entrate possono risultare < 0. In questo caso le poniamo uguali a 0.

Notiamo che per $\delta = 255$ otteniamo un'immagine completamente nera.

Immagine scurita con $\delta = 100$