

Capitolo 5

Dimensione

5.1 Dimensione di spazi vettoriali

In questa sezione vogliamo definire la dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Per questo proposito vediamo un risultato che ci permetterà di dedurre che ogni base di uno spazio vettoriale finitamente generato ha lo stesso numero di elementi.

Lemma 5.1.1. di Steinitz Sia V uno spazio vettoriale e sia $\{v_1, \dots, v_n\}$ una base di V .

Allora $\forall p > n$ e per ogni scelta di vettori w_1, \dots, w_p , essi sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. I vettori w_1, \dots, w_p si scrivono in modo unico come combinazioni lineari dei vettori della base $\{v_1, \dots, v_n\}$:

$$\begin{aligned}w_1 &= c_{11}v_1 + c_{21}v_2 + \dots + c_{n1}v_n, \\w_2 &= c_{12}v_1 + c_{22}v_2 + \dots + c_{n2}v_n, \\&\vdots \\w_p &= c_{1p}v_1 + c_{2p}v_2 + \dots + c_{np}v_n.\end{aligned}$$

Denotiamo con $\begin{pmatrix} c_{1i} \\ c_{2i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$ la colonna delle coordinate di w_i .

Una combinazione lineare $a_1w_1 + a_2w_2 + \dots + a_pw_p = 0$ dà il vettore nullo se e solo se le coordinate dei vettori w_i soddisfano

$$a_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + a_p \begin{pmatrix} c_{1p} \\ c_{2p} \\ \vdots \\ c_{np} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

quindi se e solo se

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Quindi w_1, \dots, w_p sono linearmente dipendenti se e solo se il sistema lineare omogeneo

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{np} \end{pmatrix} \cdot X = 0$$

di n equazioni in p incognite ha una soluzione non nulla.

Per l'ipotesi $p > n$, vediamo che la generica soluzione dipende da almeno $p - n \geq 1$ parametri; fissando per tali parametri dei valori non nulli, si ottiene una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo. \square

Come conseguenza si ha il seguente importante risultato.

Teorema 5.1.2. *Sia V uno spazio vettoriale. Se $\{v_1, \dots, v_n\}$ e $\{w_1, \dots, w_m\}$ sono due basi di V , allora*

$$n = m.$$

Dimostrazione. Essendo $\{v_1, \dots, v_n\}$ e w_1, \dots, w_m linearmente indipendenti, per il Lemma 5.1.1 di Steinitz si ha

$$m \leq n.$$

Infatti, se si avesse $m > n$, i vettori w_1, \dots, w_m sarebbero linearmente dipendenti.

Analogamente, essendo $\{w_1, \dots, w_m\}$ una base e v_1, \dots, v_n linearmente indipendenti, si ha

$$n \leq m,$$

da cui la tesi. \square

Definizione 5.1.3. Dato uno spazio vettoriale V , definiamo la **dimensione di V** come segue:

- se $V = \{0\}$, poniamo $\dim V := 0$;
- se $V \neq \{0\}$ e V è finitamente generato, poniamo $\dim V :=$ numero di vettori di una sua qualunque base.

Esempio 5.1.4. Per $V = \mathbb{K}^n$ abbiamo visto che c'è la base canonica \mathcal{E} , che consta di n vettori, quindi

$$\dim \mathbb{K}^n = n.$$

Esempio 5.1.5. In $V = M_{m,n}(\mathbb{K})$ c'è la base canonica, che consta di $m \cdot n$ vettori, quindi

$$\dim M_{m,n}(\mathbb{K}) = m \cdot n.$$

Esempio 5.1.6. Consideriamo il campo complesso \mathbb{C} . Esso è uno spazio vettoriale su \mathbb{C} stesso, e come tale ha dimensione

$$\dim \mathbb{C} = 1.$$

Osserviamo, però, che \mathbb{C} si può dotare anche di una struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} come segue:

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C},$$

dove la somma è quella usuale tra numeri complessi, e la moltiplicazione per uno scalare reale è definita da

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad c \cdot (a + ib) = ac + ibc.$$

Con questa struttura, una base di \mathbb{C} è data da

$$\{1, i\},$$

e quindi

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$$

Vediamo ora che in uno spazio di cui si conosce la dimensione, per individuare una sua base non è necessario verificare sia di avere dei generatori sia l'indipendenza lineare.

Proposizione 5.1.7. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione*

$$\dim V = n.$$

Allora valgono le seguenti:

1. *se v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti $\Rightarrow v_1, \dots, v_n$ formano una base di V ; in particolare, sono anche dei generatori per V .*
2. *se v_1, \dots, v_n sono dei generatori per $V \Rightarrow v_1, \dots, v_n$ formano una base di V , in particolare sono anche linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. 1. Siccome v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti, per il Teorema di Completamento si possono completare a una base di V . Essendo $\dim V = n$, ogni base di V ha esattamente n vettori, quindi non è necessario aggiungere alcun vettore all'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$, che risulta una base. In particolare, $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme di generatori.

2. Se v_1, \dots, v_n sono un insieme di generatori per V , per il Teorema di Estrazione da essi si può estrarre una base di V . Essendo $\dim V = n$, ogni base di V ha esattamente n vettori, quindi non è necessario scartare alcun vettore dall'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$, che risulta una base. In particolare, v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti.

□

Esempio 5.1.8. In particolare, sapendo che $\dim \mathbb{R}^2 = 2$, per trovare una base di \mathbb{R}^2 è sufficiente scegliere 2 vettori linearmente indipendenti, cioè 2 vettori non nulli e non proporzionali.

5.2 Dimensione di sottospazi vettoriali

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita, e sia $W \subseteq V$ un suo sottospazio vettoriale. In questa sezione daremo una limitazione sulla dimensione di W .

Osservazione 17. Sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale di V spazio vettoriale su \mathbb{K} , e consideriamo W come spazio vettoriale su \mathbb{K} . Se $w_1, \dots, w_k \in W$ sono vettori linearmente indipendenti in $W \Rightarrow w_1, \dots, w_k$ sono linearmente indipendenti anche in V .

Infatti, essendo entrambi W e V spazi vettoriali su \mathbb{K} , la condizione di indipendenza lineare come vettori di W o di V è la stessa.

Osservazione 18. Se V è finitamente generato e $W \subseteq V$ è un suo sottospazio vettoriale \Rightarrow anche W è finitamente generato.

Infatti, sia $\dim V = n$, e fissiamo $w_1, \dots, w_k \in W$ vettori linearmente indipendenti in W . Se $W = \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$, allora W è finitamente generato.

Se $W \supsetneq \text{Span}(w_1, \dots, w_k)$, allora possiamo scegliere un vettore

$$w_{k+1} \notin \text{Span}(w_1, \dots, w_k), \quad w_{k+1} \in W.$$

Per il Lemma ??, i vettori w_1, \dots, w_k, w_{k+1} sono linearmente indipendenti. Ripetiamo il procedimento. Siccome per l'Osservazione 17 vettori linearmente indipendenti in W sono anche linearmente indipendenti in V , e siccome in V ci sono al più n vettori linearmente indipendenti per il Lemma 5.1.1 di Steinitz, il procedimento termina dopo un numero finito di passi. Quindi troviamo un numero finito di vettori di W che generano W .

Corollario 5.2.1. Ogni sottospazio vettoriale W di V , spazio vettoriale finitamente generato, è del tipo

$$W = \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$$

per opportuni vettori $w_1, \dots, w_m \in W$.

Proposizione 5.2.2. Sia V uno spazio vettoriale finitamente generato e sia $W \subseteq V$ un sottospazio vettoriale. Allora valgono:

1. $\dim W \leq \dim V$;
2. $\dim W = \dim V \iff W = V$.

Dimostrazione. 1. Sia $\{w_1, \dots, w_k\}$ una base di W . I vettori w_1, \dots, w_k sono linearmente indipendenti anche in V , per l'Osservazione 17. Per il Teorema di Completamento, possiamo completare l'insieme $\{w_1, \dots, w_k\}$ a una base \mathcal{B} di V . Quindi si ha

$$\dim W = \#\{w_1, \dots, w_k\} \leq \#\mathcal{B} = n = \dim V.$$

2. Se $W = V$, è chiaro che hanno la stessa dimensione.

Viceversa, supponiamo $\dim W = \dim V = n$, e fissiamo una base $\{w_1, \dots, w_n\}$ di W . Per l'Osservazione 17 i vettori w_1, \dots, w_n sono linearmente indipendenti anche in V . Infine, essi formano una base di V per la Proposizione 5.1.7, primo punto. Quindi

$$W = \text{Span}(w_1, \dots, w_n) = V.$$

□

5.3 Formula di Grassmann

In questa sezione vediamo una formula che lega la dimensione di un'intersezione di sottospazi vettoriali con la dimensione del sottospazio somma.

Teorema 5.3.1. Formula di Grassmann *Siano*

$$W_1 \subseteq V, \quad W_2 \subseteq V$$

due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale finitamente generato V . Allora vale

$$\dim(W_1 \cap W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 + W_2). \quad (5.2)$$

Dimostrazione. Fissiamo una base di $W_1 \cap W_2$:

$$\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2} = \{w_1, \dots, w_r\}, \quad r = \dim W_1 \cap W_2.$$

Essendo $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ un sottospazio vettoriale, per il Teorema del Completamento, possiamo completare i vettori w_1, \dots, w_r ad una base di W_1 :

$$\mathcal{B}_{W_1} = \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s\}, \quad r + s = \dim W_1.$$

Analogamente, essendo $W_1 \cap W_2 \subseteq W_2$ un sottospazio vettoriale, per il Teorema del Completamento, possiamo completare i vettori w_1, \dots, w_r ad una base di W_2 :

$$\mathcal{B}_{W_2} = \{w_1, \dots, w_r, u_1, \dots, u_k\}, \quad r + k = \dim W_2.$$

Vogliamo dimostrare che

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2) = r + s + r + k - r = r + s + k.$$

A tale scopo affermiamo che

$$\mathcal{B}_{W_1} \cup \mathcal{B}_{W_2} = \{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$$

è una base di $W_1 + W_2$.

Infatti, $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$ sono dei generatori per $W_1 + W_2$: sia $w \in W_1 + W_2$; per definizione di spazio somma, w si può scrivere nella forma

$$w = z_1 + z_2, \quad z_1 \in W_1, \quad z_2 \in W_2,$$

per opportuni vettori z_1 e z_2 . I due vettori, a loro volta, si possono scrivere come combinazioni lineari delle basi di W_1 e W_2 , rispettivamente:

$$z_1 = a_1 w_1 + \dots + a_r w_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s, \quad z_2 = c_1 w_1 + \dots + c_r w_r + d_1 u_1 + \dots + d_k u_k,$$

e quindi

$$w = (a_1 + c_1)w_1 + \dots + (a_r + c_r)w_r + b_1 v_1 + \dots + b_s v_s + d_1 u_1 + \dots + d_k u_k,$$

cioè ogni vettore di $W_1 + W_2$ è combinazione lineare dei $\{w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k\}$.

Mostriamo, infine, che $w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_k$ sono linearmente indipendenti. Consideriamo una loro combinazione lineare che dia il vettore nullo:

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k = 0. \quad (5.3)$$

Questa relazione può essere riscritta nella forma

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = -\delta_1 u_1 - \dots - \delta_k u_k,$$

quindi il vettore $-\delta_1 u_1 - \dots - \delta_k u_k \in W_2$ è anche combinazione lineare dei vettori della base di W_1 , quindi

$$-\delta_1 u_1 - \dots - \delta_k u_k \in W_1 \cap W_2.$$

Come conseguenza può essere scritto come combinazione lineare dei vettori della base $\mathcal{B}_{W_1 \cap W_2}$:

$$-\delta_1 u_1 - \dots - \delta_k u_k = \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r,$$

da cui

$$\gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_r w_r + \delta_1 u_1 + \dots + \delta_k u_k = 0.$$

Quest'ultima è una combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}_{W_2} , che sono linearmente indipendenti, quindi

$$\gamma_1 = \dots = \gamma_r = \delta_1 = \dots = \delta_k = 0.$$

Quindi la relazione (5.3) diventa

$$\alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_r w_r + \beta_1 v_1 + \dots + \beta_s v_s = 0,$$

che è una combinazione lineare dei vettori di \mathcal{B}_{W_1} , che sono linearmente indipendenti, quindi

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \beta_1 = \dots = \beta_s = 0.$$

□

Corollario 5.3.2. *Siano*

$$W_1 \subseteq V, \quad W_2 \subseteq V$$

due sottospazi vettoriali di uno spazio vettoriale con $\dim V = n$. Allora vale

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geq \dim W_1 + \dim W_2 - n. \quad (5.4)$$

Dimostrazione. Basta osservare che essendo $W_1 + W_2 \subseteq V$, per la Proposizione 5.2.2, primo punto, si ha

$$\dim W_1 + W_2 \leq n.$$

□

Esempio 5.3.3. In particolare, se W_1 e W_2 sono due piani vettoriali di \mathbb{R}^3 , abbiamo che

$$\dim(W_1 \cap W_2) \geq 2 + 2 - 3 = 1,$$

cioè due piani vettoriali si intersecano sempre almeno lungo una retta vettoriale.