

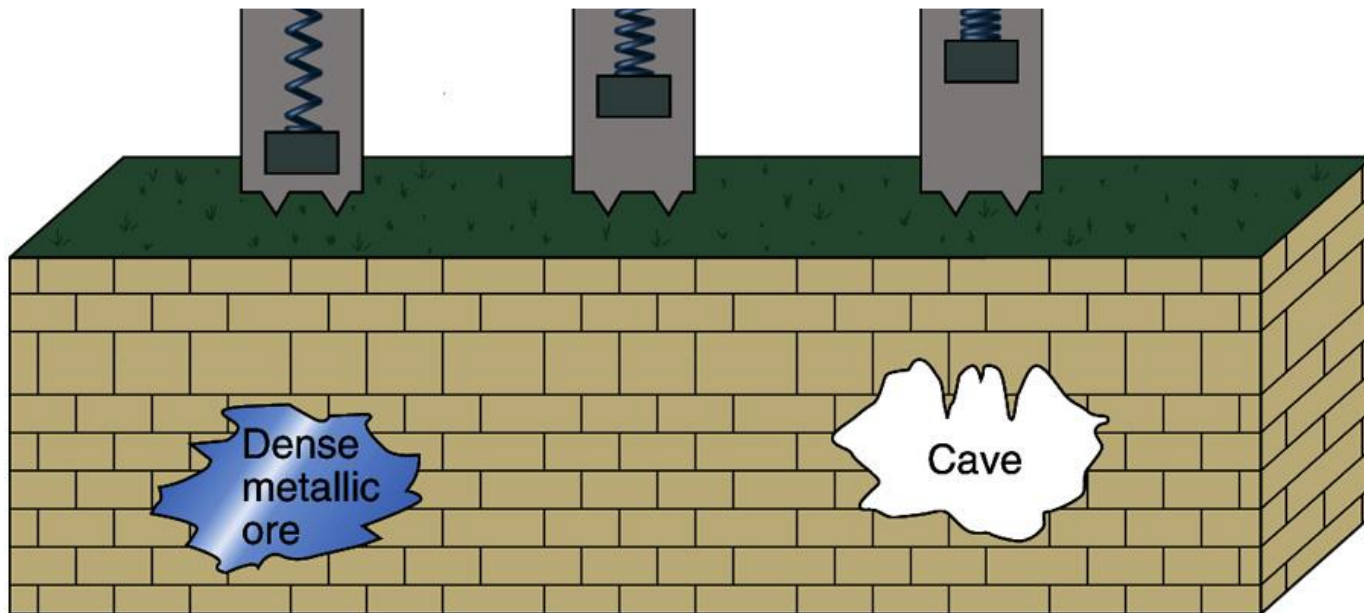


Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

differences in density of materials (rocks) in Earth's interior produces small differences in local gravity field (**anomalies**)

*can be measured with a **gravimeter** (attraction of spring to mass)*



**dense material
attracts
and extends spring**

**mass uniform
and spring
is neutral**

**void (cave) has no
mass to attract
spring**



MISURE DI GRAVITA'

Il valore della gravità in un punto di misura può essere determinate mediante l'osservazione di fenomeni influenzati da g , ad esempio il moto di un pendolo:

$$T = 2\pi\sqrt{l/g}$$

oppure la caduta libera di un corpo:

$$s = \frac{1}{2}gt^2$$

I metodi che utilizzano tali fenomeni vengono detti dinamici e forniscono misure assolute (valore della gravità nel punto).

Le misure assolute sono alquanto laboriose, richiedono tempo ed un controllo accurato sulle possibili cause di errore, Vengono pertanto effettuate per grandi variazioni di g (500 mgal) e lunghissime distanze.



Gli strumenti adatti ad una rapida misura della gravità sono da ricercare nei metodi **statici, che prevedono l'osservazione di un Sistema in equilibrio. I gravimetri statici consentono soltanto **misure relative** della gravità (differenza rispetto una misura **g** iniziale). Le misure sono rapide e possono avere accuratezze elevate (μgal).**



GRAVIMETRO ASSOLUTO

Uno dei gravimetrici assoluti più accurate ($10 \mu\text{gal}$) è quello dell'Istituto Metrologico Colonnetti di Torino, che si basa sulla caduta libera simmetrica: un corpo viene lanciato in alto e ricade. Per determinare g bisogna misurare due tempi ed una lunghezza.

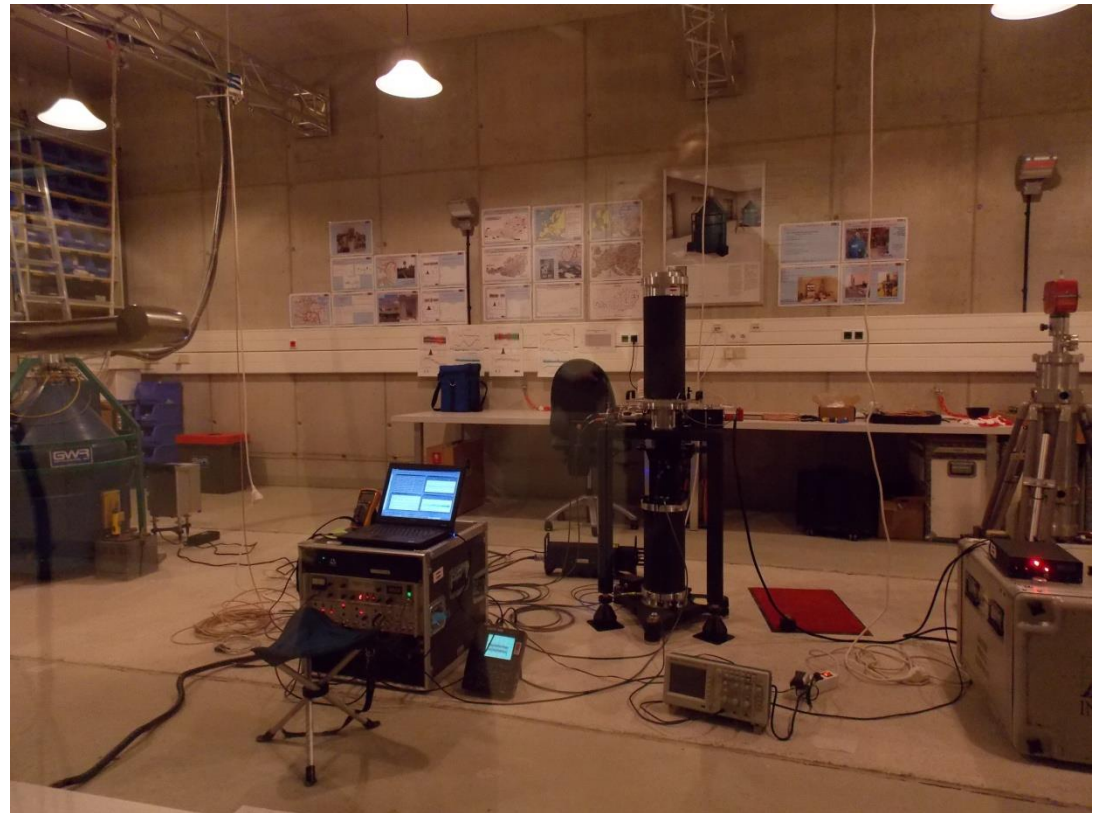


Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa



Medicina, (I)





Fisica Terrestre 2023-2024

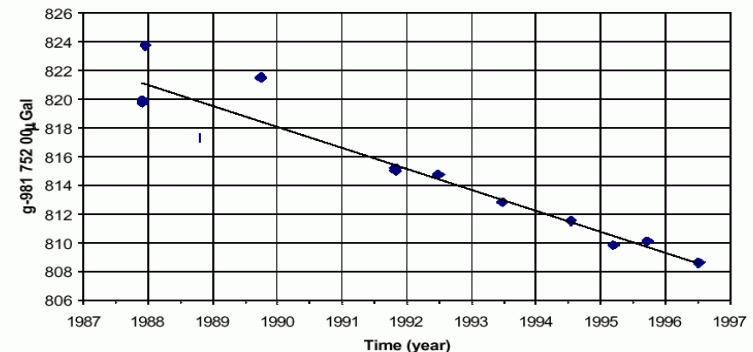
Giovanni Costa

Absolute measurement of gravity



Glacial Rebound Studies – Churchill, Canada

CHURCHILL ABSOLUTE GRAVITY TIME SERIES
(FIT TREND OF $-1.45 \mu\text{Gal}/\text{year}$)

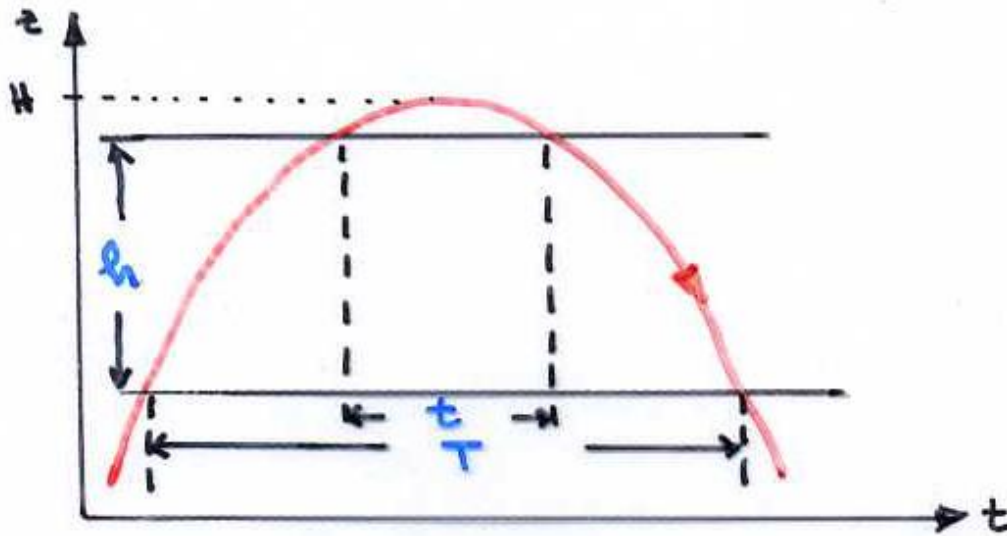


The measurement of an absolute value of gravity is difficult and requires complex apparatus and a lengthy period of observation !



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa



$$H = \frac{1}{2}g\left(\frac{T}{2}\right)^2$$

$$H - h = \frac{1}{2}g\left(\frac{t}{2}\right)^2$$

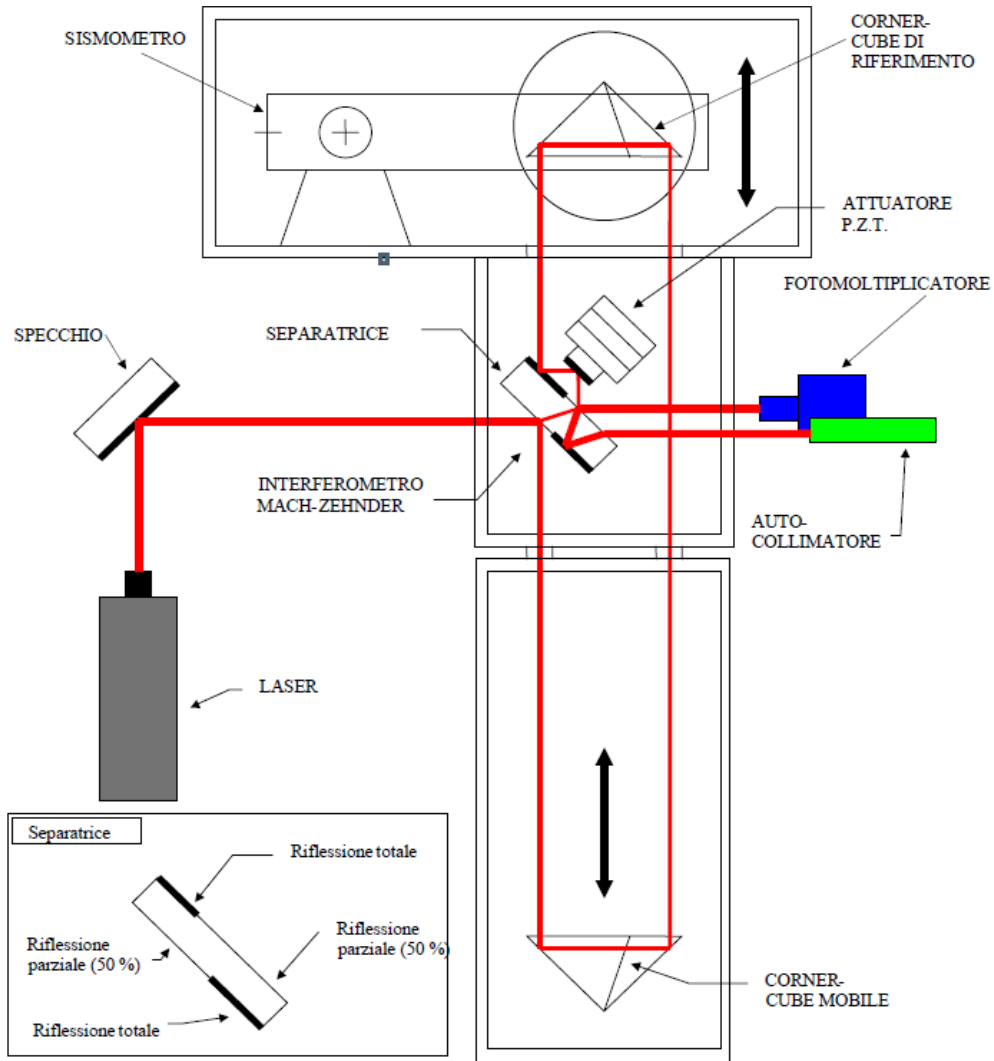
$$h = \frac{1}{8}g(T^2 - t^2)$$

$$g = \frac{8h}{T^2 - t^2}$$



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa



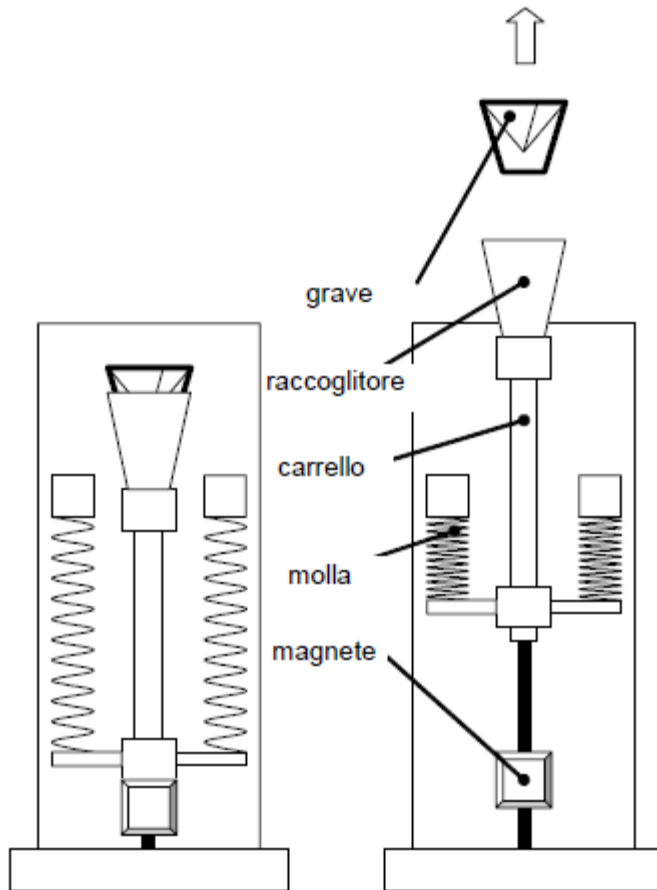


Fig. 8: disegno schematico del sistema di lancio.



Fig. 10: IMG-C-02 nel Lab Forze INRIM.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

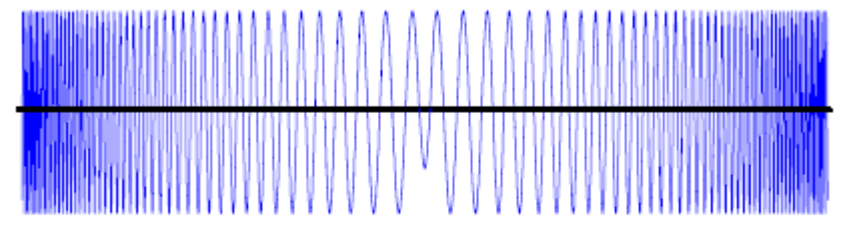
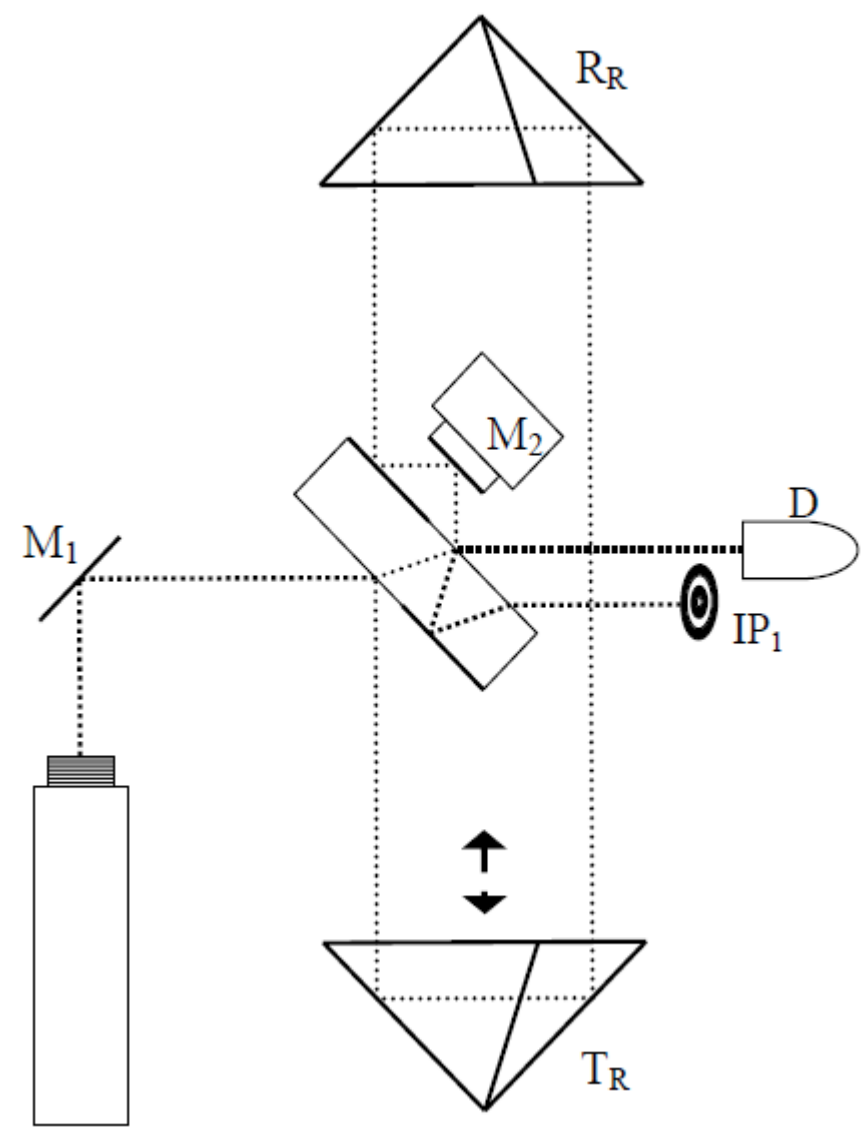
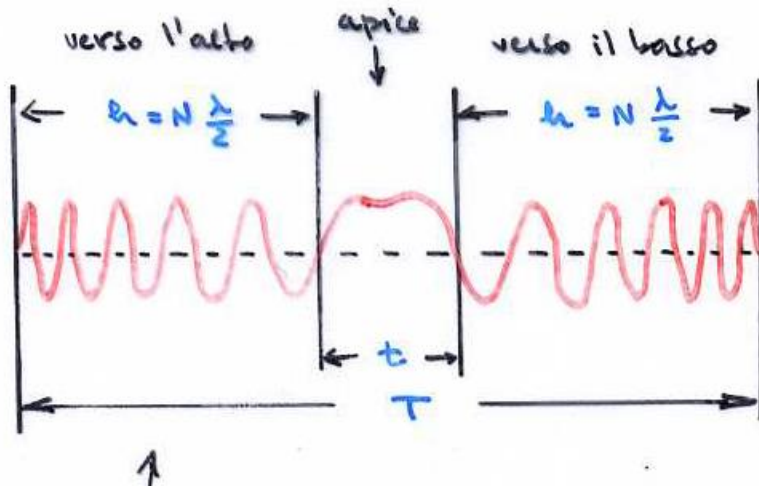


Figura 3: layout schematico del sistema ottico interferometrico e frange di interferenza rilevate



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

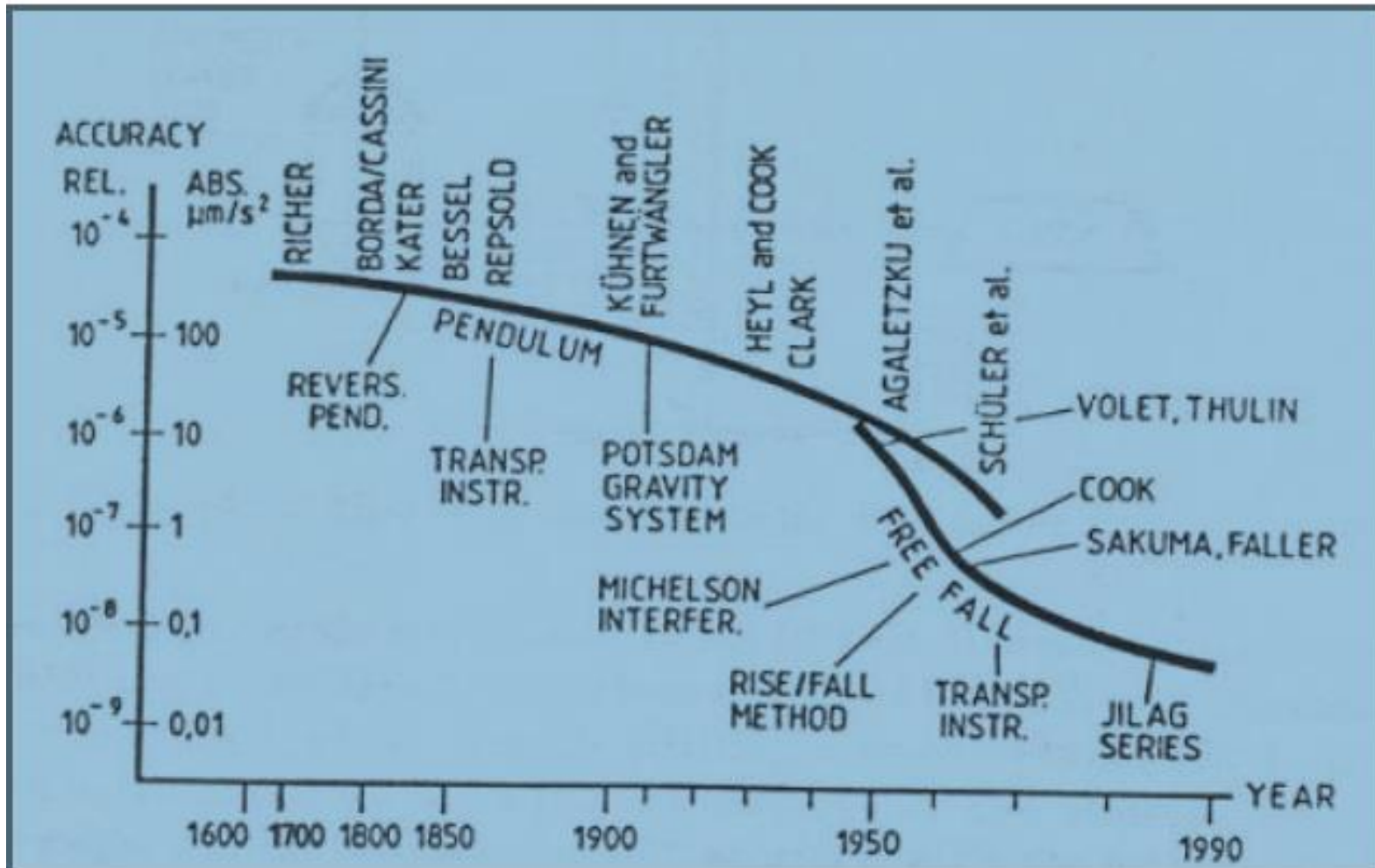


lo strumento è essenzialmente un interferometro di Michelson: la lunghezza di riferimento è data dal braccio fissa (collo M_2), la lunghezza da misurare è lo spostamento del braccio sul corpo.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

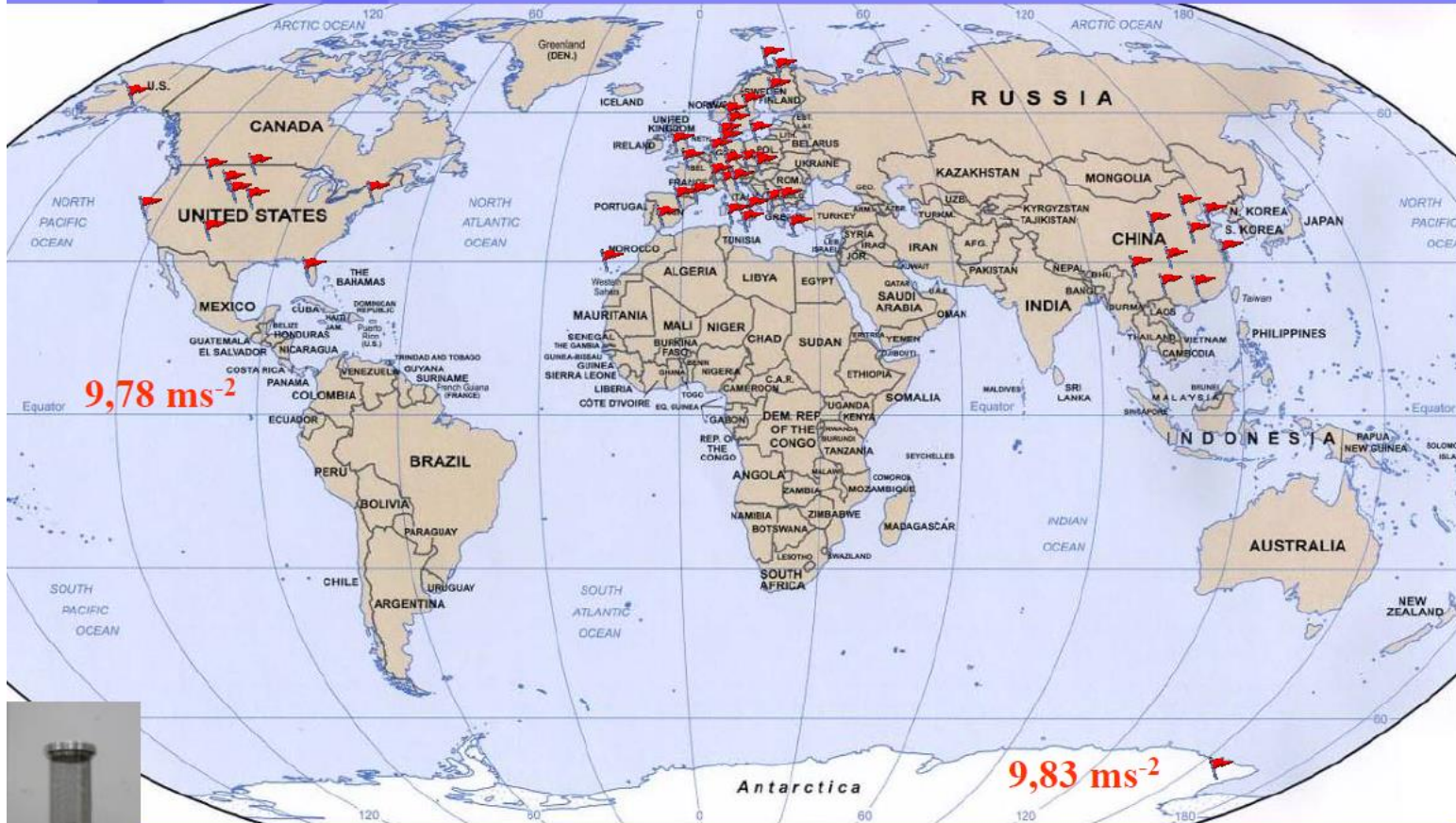




Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Misure assolute con il gravimetro IMG-CNR



Complessive: più di 200 "ufficiali"

Gravimetro lineare

Il principio è quello del dinamometro: una massa m sospesa ad una molla con costante k . Nella condizione di equilibrio avremo:

$$mg = kz_0$$

Se la gravità varia, sarà

$$mdg = k dz$$

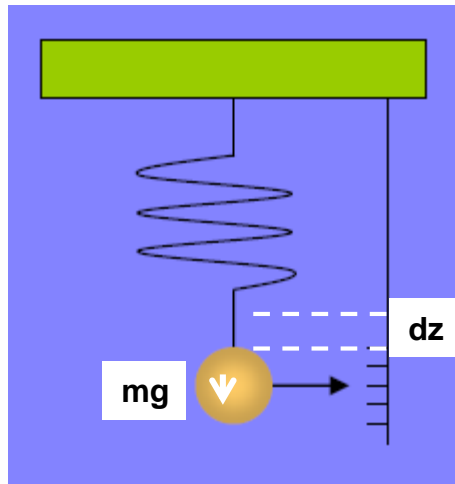
da cui

$$\frac{dz}{dg} = \frac{m}{k}$$

e il rapporto dà la **sensibilità** dello strumento. Spostando la massa dalla condizione di equilibrio ed applicando la legge di Newton:

$$mg - kz = m \frac{d^2(z-z_0)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2(z-z_0)}{dt^2} + \frac{k}{m} (z-z_0) = 0$$





L'equazione differenziale è quella del moto armonico con periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{dz}{dg}}$$

Si vede che la sensibilità è direttamente proporzionale al quadrato del periodo. Costruttivamente è difficile ottenere $T > 1$ s, per cui se si vuole misurare

$$dg \cong 10^{-5} \text{ gal}$$

occorre valutare

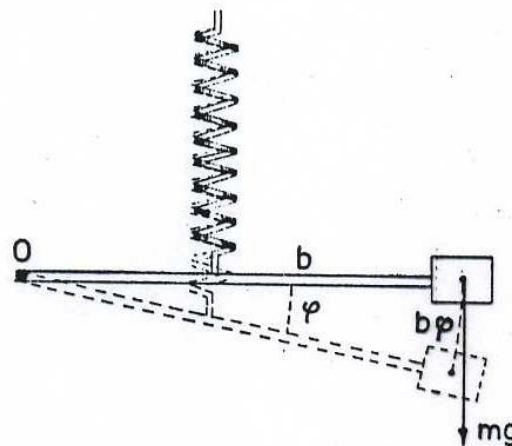
$$dz = \frac{1}{4\pi^2} 10^{-5} \approx .25 \times 10^{-6} \text{ cm}$$

e si ha bisogno di ingrandimenti fortissimi! Pertanto tali gravimetri sono stati abbandonati.

Gravimetri astatici

I gravimetri astatici sono strumenti di grande precisione e già nel 1850 avevano la sensibilità di 10 mgal.

Essi sono costituiti essenzialmente da un braccio che può ruotare attorno ad un punto O nel piano $P(x,z)$ e porta all'estremo libero una massa m ; il braccio è mantenuto in posizione orizzontale da una molla fissata ad un asse verticale passante per O . L'equilibrio del sistema dipende dai momenti delle forze in gioco rispetto ad O : uno dovuto alla g agente su m ; un'altro dovuto alla reazione elastica della molla di bilanciamento.





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

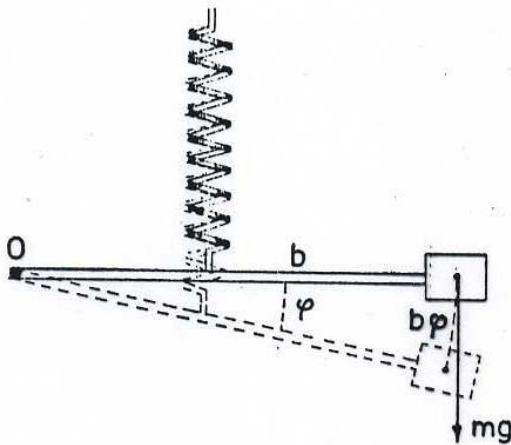
Sia φ l'angolo nel piano $P(x,z)$ compreso tra il braccio b e il piano orizzontale passante per O .

Supponiamo che per effetto di g si raggiunga l'equilibrio per una rotazione del braccio di un angolo φ ; in queste condizioni ovviamente le forze in gioco sono in equilibrio e quindi il momento totale delle forze in gioco M deve essere nullo; in termini di modulo:

$$M(g, \varphi) = 0 .$$

Derivando:
$$\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right) d\varphi + \left(\frac{\partial M}{\partial g}\right) dg$$

si ottiene la **sensibilità** :



$$\frac{d\varphi}{dg} = - \frac{\frac{\partial M}{\partial g}}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}}$$

Il momento totale è dato dalla componente stabilizzante (elastica) e quella labilizzante (gravitazionale):

$$M = M_e - M_g$$

Per piccoli valori di φ : $M_g = mgb \cos \varphi \approx mgb$

ed avremo: $\frac{\partial M_g}{\partial g} = mb$, mentre $\frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} = 0$ perché M_e

non dipende esplicitamente da g .

Quindi sarà:
$$d\varphi = -\frac{-mb}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}} dg$$

E per uno spostamento infinitesimo ds della massa corrisponde una rotazione $d\varphi$, si avrà:

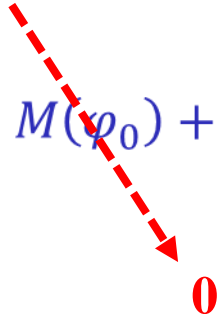
$$ds = bd\varphi = -\frac{-mb^2}{\frac{\partial M}{\partial \varphi}} dg$$



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Spostando la massa dal punto di equilibrio φ_0 essa si metterà ad oscillare attorno al punto φ_0 . Per il principio d'Alambert, l'equazione del moto si otterrà eguagliando i momenti delle forze applicate e quelli delle forze di inerzia. Il momento delle forze applicate attorno al punto di equilibrio (φ piccolo e g costante) si può scrivere:

$$M(\varphi) = M(\varphi_0) + \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi} \right) \varphi + \dots$$




Mentre il momento della fase d'inerzia, essendo accelerazione tangenziale $b\ddot{\varphi}$, sarà dato da:

$$M_i = b \cdot m a_t = m b^2 \ddot{\varphi}$$

Da cui si ricava che l'equazione del moto sarà:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{(\partial M / \partial \varphi)_0}{m b^2} \varphi = 0$$

Che dà ancora un moto armonico di periodo:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m b^2}{(\partial M / \partial \varphi)_0}}$$



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

E pertanto anche in questo caso la sensibilità è proporzionale al quadrato del periodo.

Per ottenere periodi grandi e sensibilità elevate basterà realizzare:

$$\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_0 \approx 0$$



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Il procedimento di rendere $(\frac{\partial M}{\partial \varphi})_0 \approx 0$ viene detto **astatizzazione** e può essere realizzato in vari modi:

Per avere

$$\frac{\partial M}{\partial \varphi} = \frac{\partial M_e}{\partial \varphi} - \frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \approx 0$$

si può procedere in due modi.

① Rendere M_g indipendente da φ (per cui $\frac{\partial M_g}{\partial \varphi} \approx 0$) e realizzare le condizioni geometriche del sistema in modo che sia $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx 0$

a) lunghezza molla varia di pochissimo

b) aumenta la tensione, ma diminuisce il braccio

② Rendere $\frac{\partial M_e}{\partial \varphi} \approx \frac{\partial M_g}{\partial \varphi}$

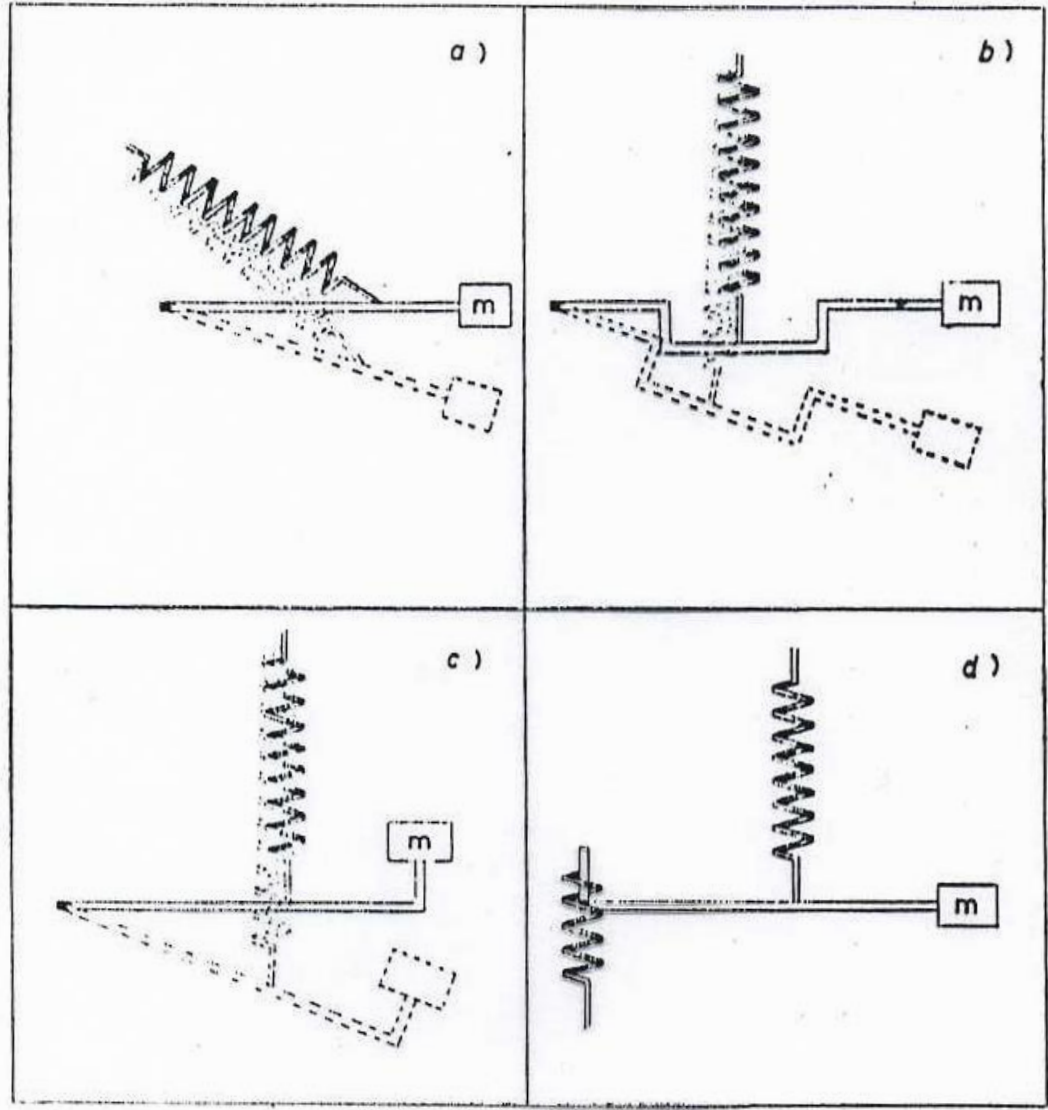
c) aumenta M_e , ma aumenta pure M_g

d) ad un aumento di M_e si contrappone un momento contrario dovuto ad un'altra molla



Fisica Terrestre 2023-2024

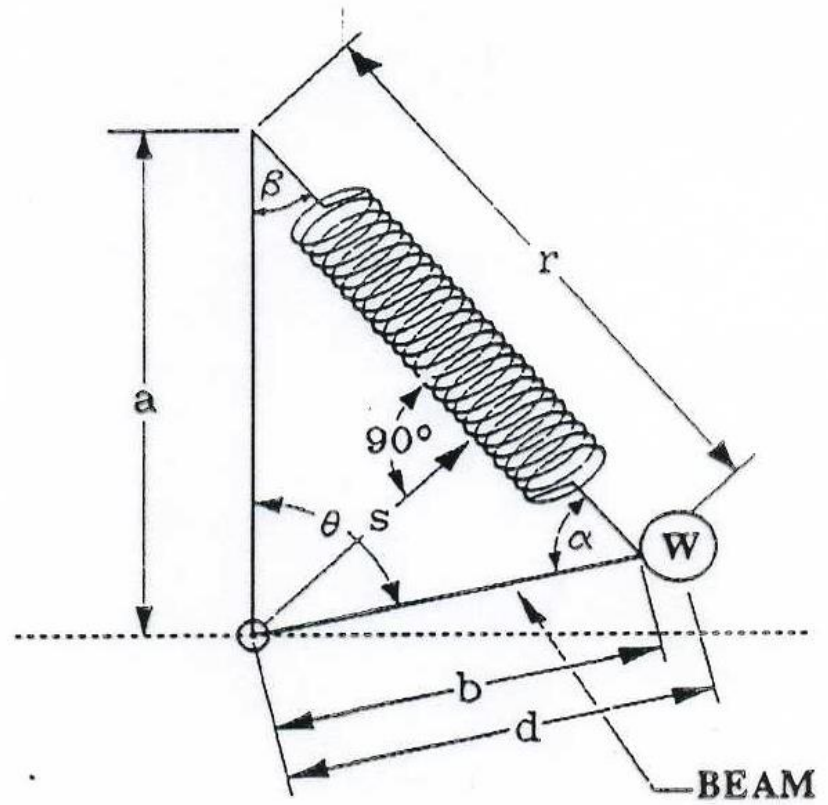
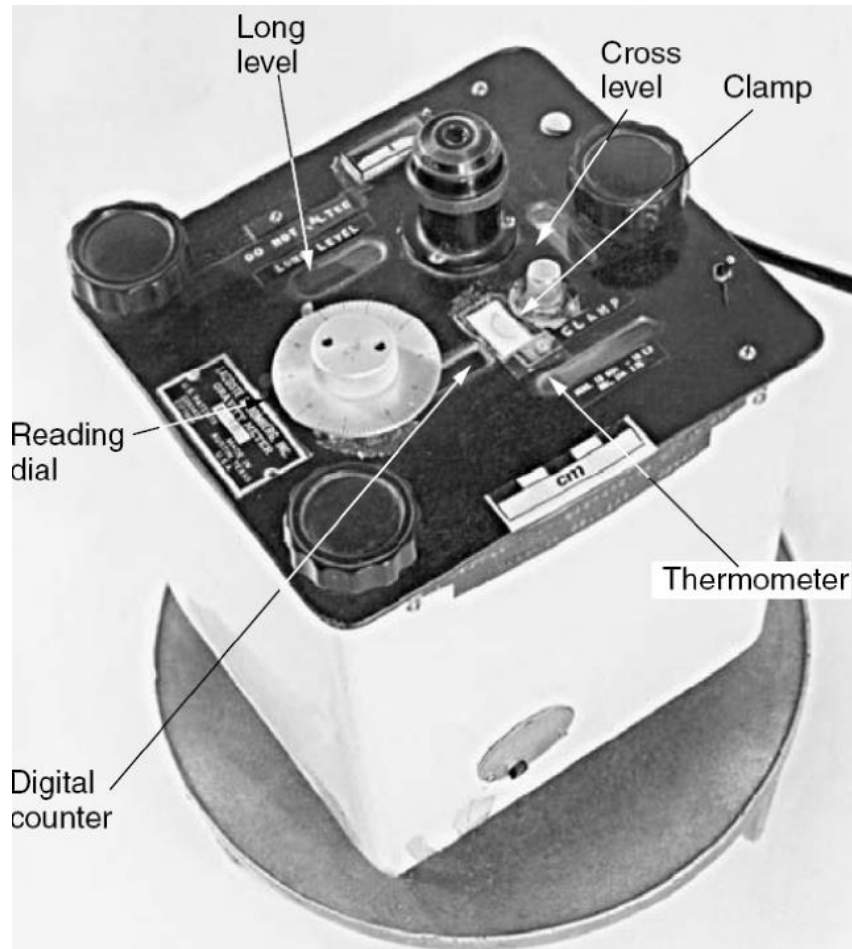
Giovanni Costa



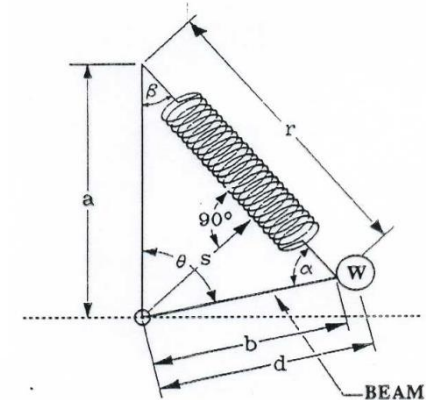


Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa



La Coste - Romberg



Momento dovuto alla forza gravitazionale:

$$M_g = mg \sin \theta d$$

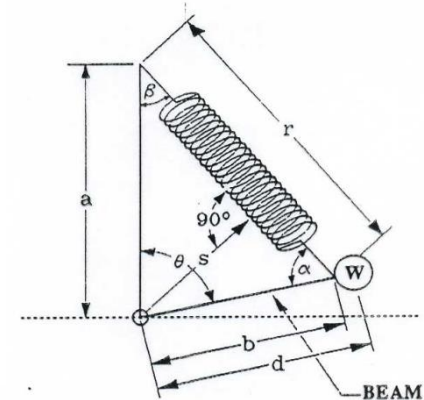
Momento dovuto alla molla di lunghezza zero:

$$M_e = -krs$$

Si dimostra facilmente che questo equivale alle:

$$M_e = -kab \sin \theta$$

La Coste - Romberg



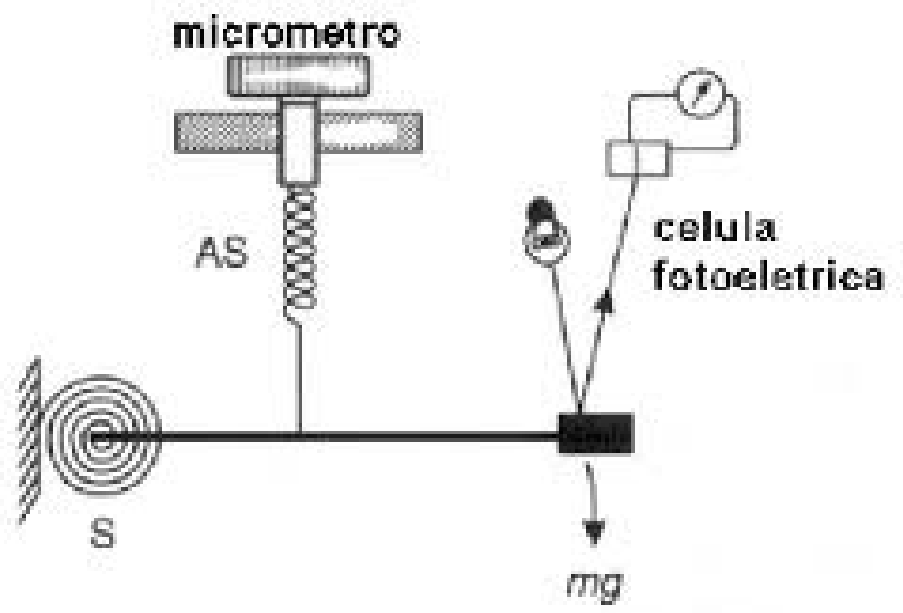
Per il momento totale vale allora:

$$M = (mgd - kab) \sin \theta$$

Con opportune scelte dei parametri, il momento di richiamo può essere fatto molto piccolo, ottenendo uno strumento molto sensibile.



Askania

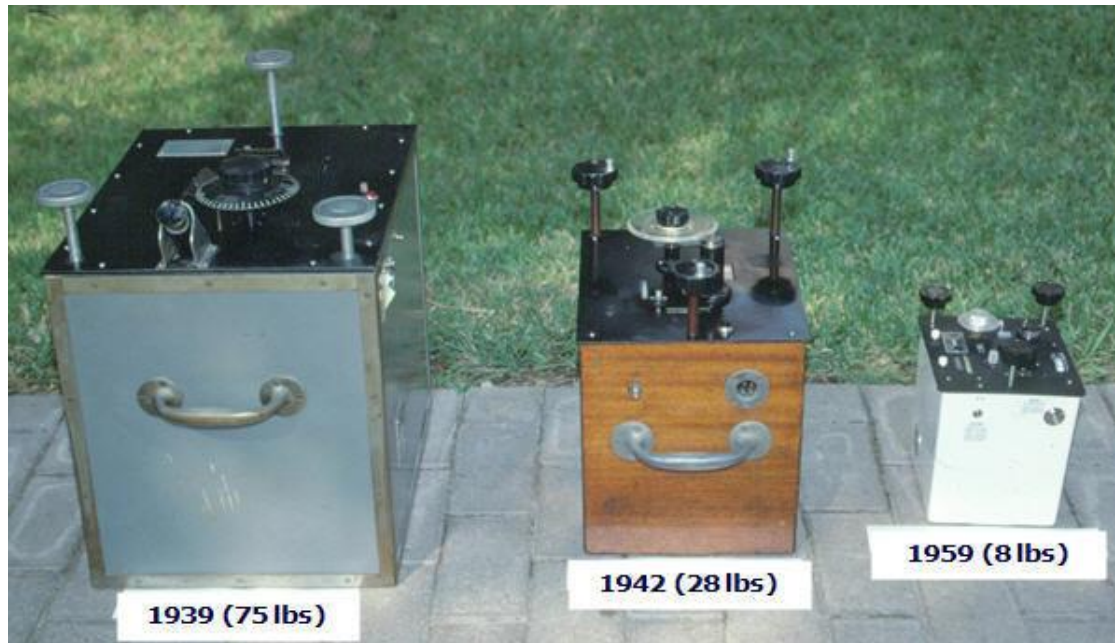




Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Relative measurement of gravity



Gravimeters for general surveying use are capable of registering changes in gravity with an accuracy of 0.1 gu. A new generation of more efficient zero-length springs has been developed. Microprocessor-controlled instruments are now available which are, within limits, selflevelling, and which allow observations to be made rapidly. Also available for more specialized surveys are gravimeters capable of detecting gravity changes as small as 1 microgal (10^{-8}ms^{-2}) !!!.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Gravity survey

A microgravity survey (50 m spaced lines and 20 m spaced stations)

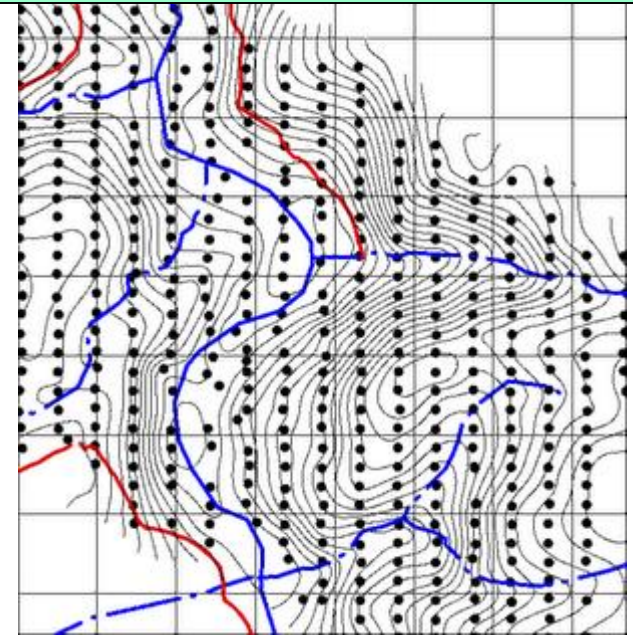
- The goal of gravity surveying is to locate and describe subsurface structures from the gravity effects caused by their anomalous densities.

- Most commonly, gravimeter measurements are made at a network of stations, spaced according to the purpose of the survey.

- In environmental studies a detailed high-resolution investigation of the gravity expression of a small area requires small distances of a few meters between measurement stations.

- In regional gravity surveys, as used for the definition of hidden structures of prospective commercial interest, the distance between stations may be several kilometers.

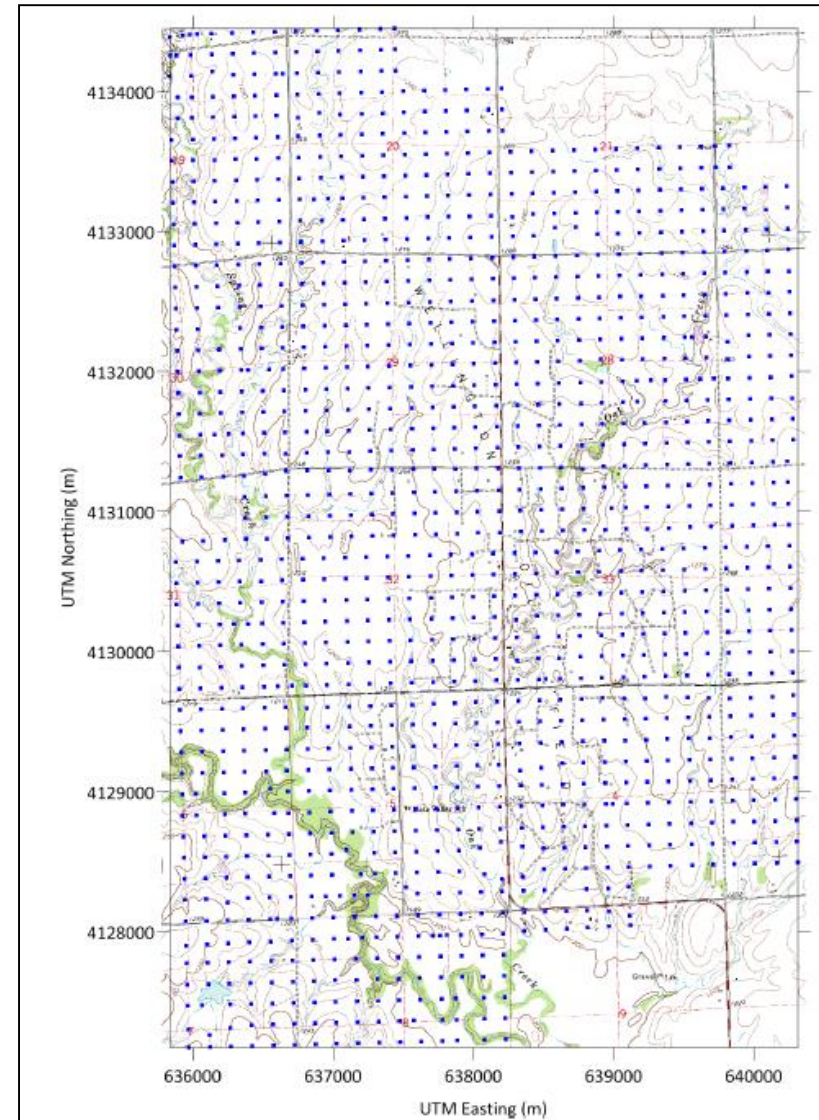
- If the area surveyed is not too large, a suitable site is selected as base station (or reference site), and the gravity differences between the surveyed sites and this site are measured.



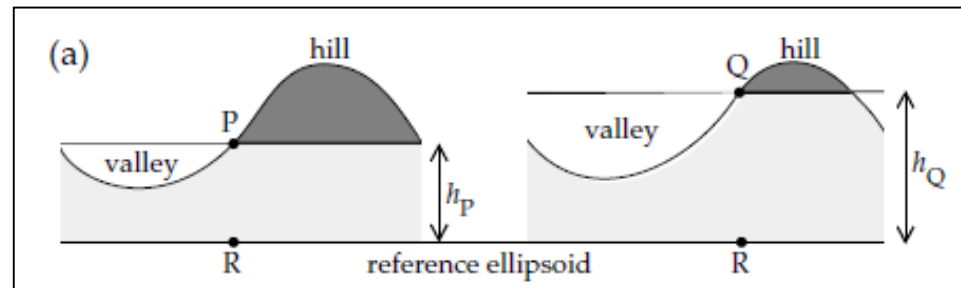
Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

- In order to obtain a reduced gravity value accurate to ± 1 mgal, the reduction procedure described in the following section indicates that the gravimeter must be read to a precision of ± 0.1 mgal, the latitude of the station must be known to ± 10 m and the elevation of the station must be known to ± 10 mm.
- The latitude of the station must consequently be determined from maps at a scale of $1 : 10\,000$ or smaller, or by the use of electronic position-fixing systems.
- Uncertainties in the elevations of gravity stations probably account for the greatest errors in reduced gravity values on land;
- The optimal equipment at present is the global positioning system (GPS), whose constellation of 24 satellites is now complete and an unadulterated signal is broadcast. Signals from these can be monitored by a small, inexpensive receiver.
- Use of differential GPS, that is, the comparison between GPS signals between a base set at a known elevation and a mobile field set, can provide elevations to an accuracy of some 25 mm.



- Before the results of a gravity survey can be interpreted it is necessary to correct for all variations in the Earth's gravitational field which do not result from the differences of density in the underlying rocks. This process is known as **gravity reduction** or reduction to the geoid
- In practice, it is not possible to measure gravity on the ellipsoid at the place where the reference value is known. The elevation of a measurement station may be hundreds of meters above or below the ellipsoid. Moreover, the gravity station may be surrounded by mountains and valleys that perturb the measurement.



let P and Q represent gravity stations at different elevations in hilly terrain. The theoretical value of gravity is computed at the points R on the reference ellipsoid below P and Q. Thus, we must correct the measured gravity before it can be compared with the reference value.

Marea terrestre



0.1 mGal



Marea terrestre

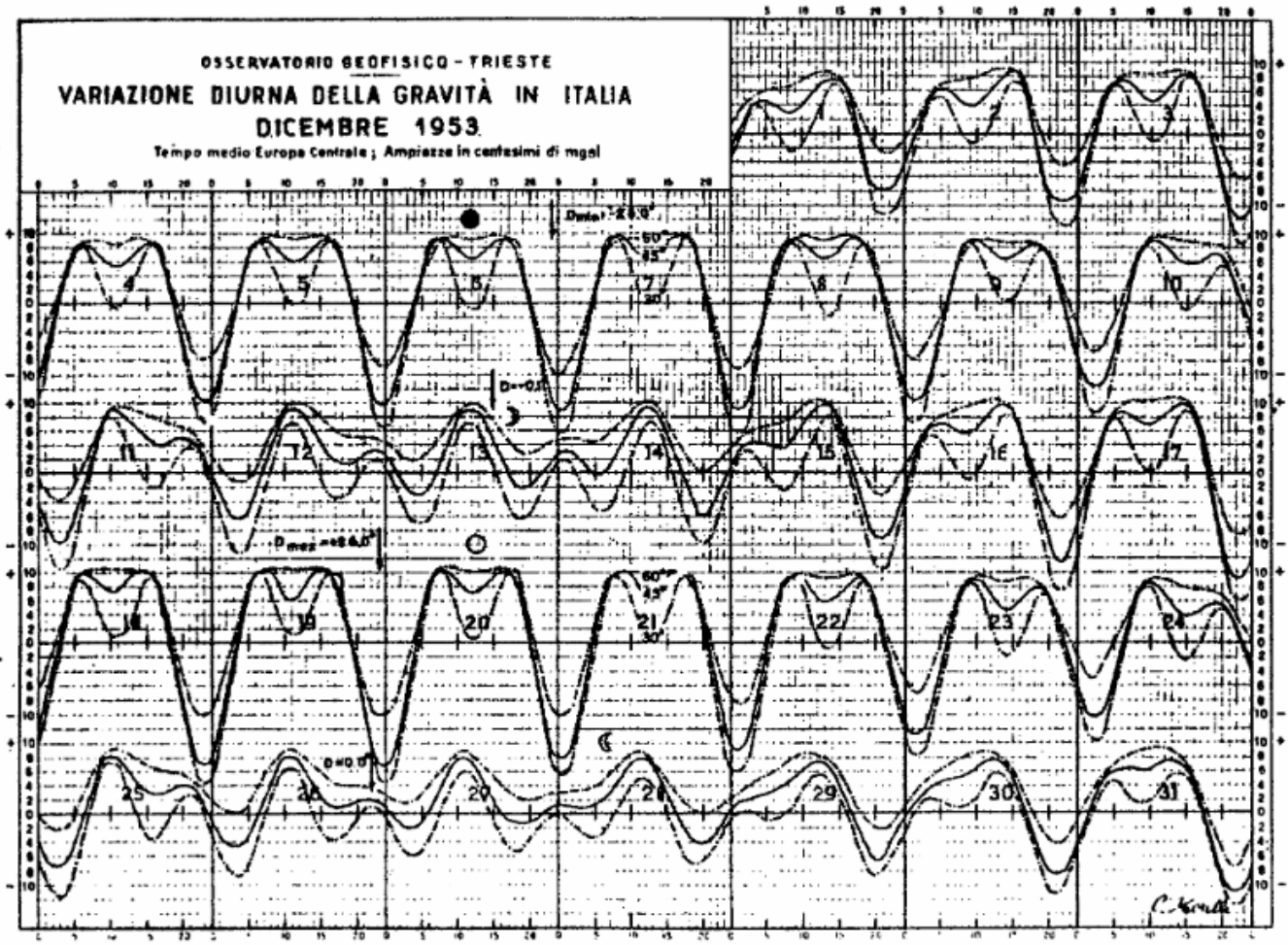


Fig. 6 – Variazione diurna della gravità in Italia; l'unità di misura è il centesimo di mgal (da Morelli)



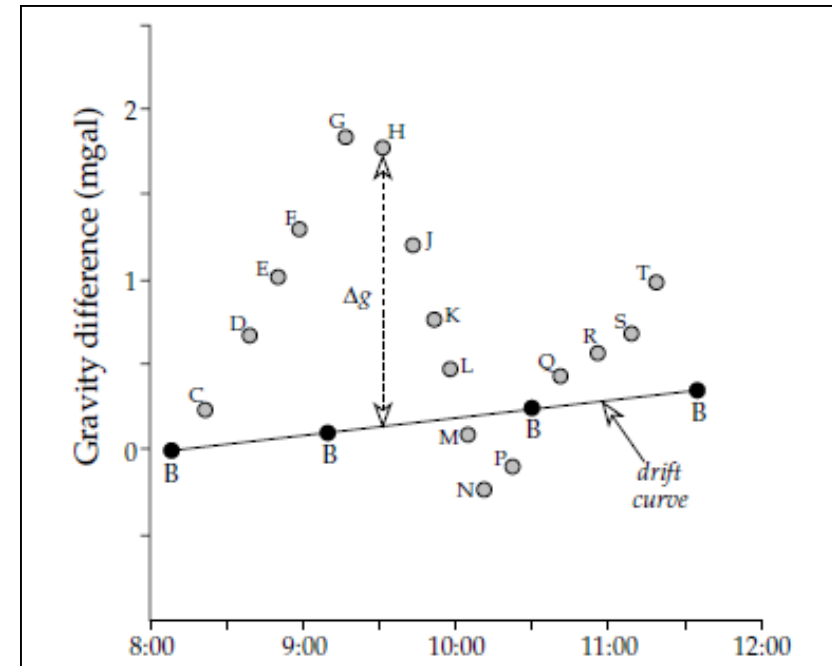
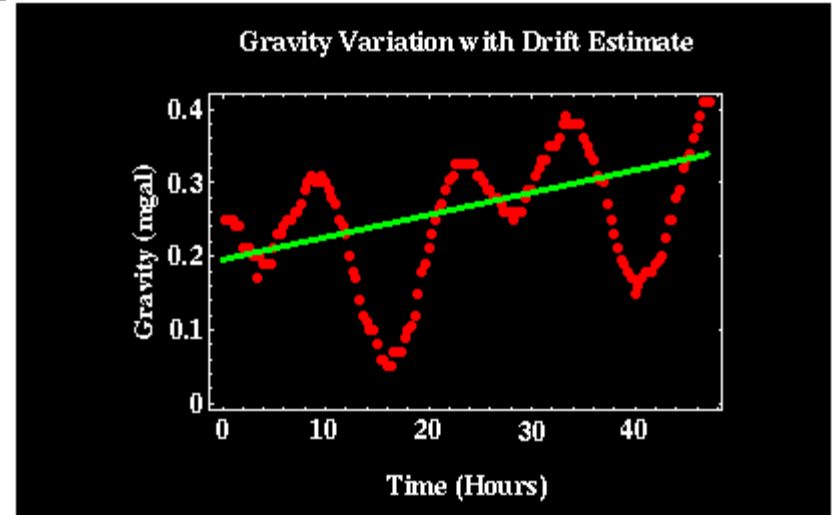
Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

- A shortcoming of gravimeters is the phenomenon of *drift*. This refers to a gradual change in reading with time, observable when the instrument is left at a fixed location.

- Drift results from the imperfect elasticity of the springs, which undergo anelastic creep with time. Drift can also result from temperature variations which, unless counteracted in some way, cause expansion or contraction of the measuring system and thus give rise to variations in measurements that are unrelated to changes in gravity.

- The effect is small in modern gravimeters and can be compensated by making a drift correction. This is obtained by repeated occupation of some measurement stations at intervals during the day. Gravity readings at other stations are adjusted by comparison with the drift curve. In order to make this correction the time of each measurement must be noted.





Deriva strumentale

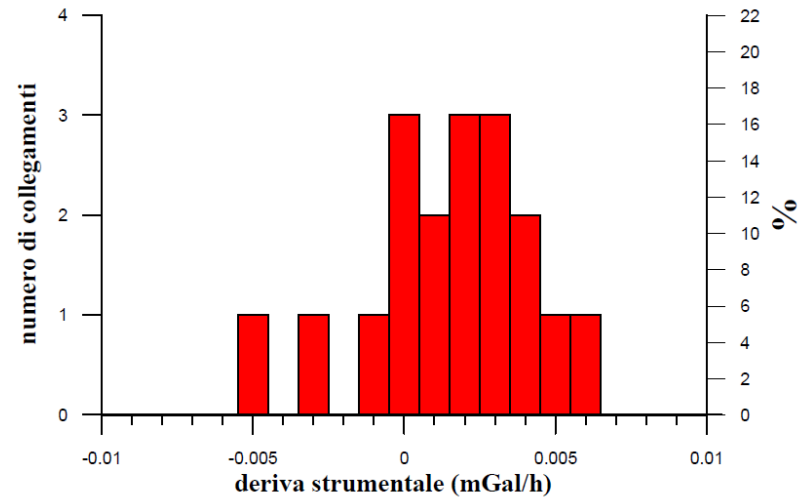
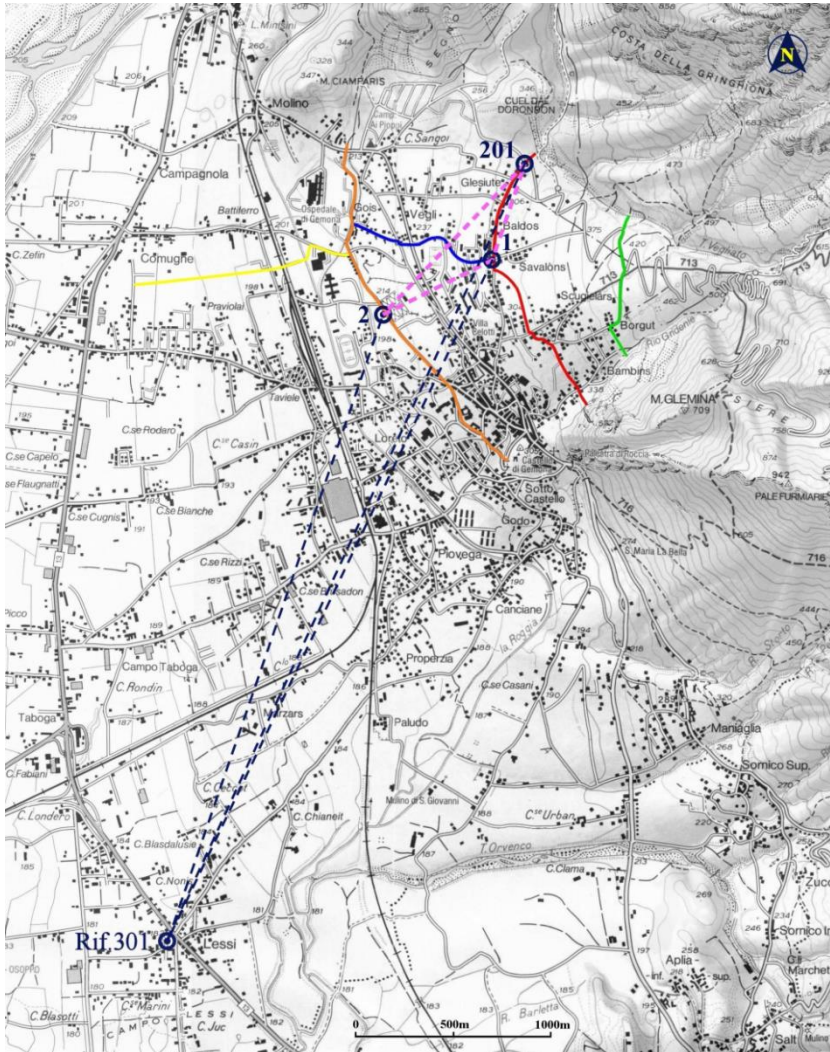


fig. 4.14 Distribuzione dei valori di deriva strumentale della rete del 1° ordine



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

Per interpretare i valori di gravità g_m , che vengono misurati sulla superficie terrestre, in termini di anomalie locali o regionali, bisogna prima rimuovere certi effetti, comuni a tutte le misure. Supponendo che gli effetti di **deriva** e **calibrazione** dello strumento, nonché delle maree terrestri siano già stati (se necessario) rimossi, le correzioni (dette anche **riduzioni**) da applicare sono:

- 1) **Correzioni di latitudine (gravità normale)**
- 2) **Correzione di aria libera (di Faye)**
- 3) **Correzione della piastra (di Bouguer)**
- 4) **Correzione topografica**
- 5) **Correzione isostatica**



Le componenti dell'accelerazione di gravità

$$g = G \frac{M}{R^2} - \omega^2 R \cos^2 \varphi$$

Comp.

newtoniana

$$\cong 9,8 \text{ms}^{-2}$$

$$|F| = G \frac{M \cdot m}{r^2}$$

Comp.

centrifuga

$$\cong 2 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2} (\text{max})$$

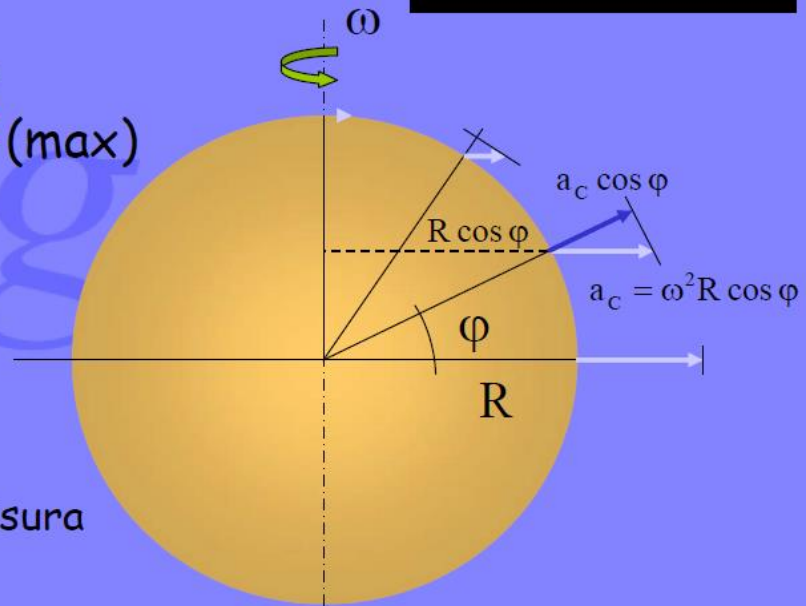
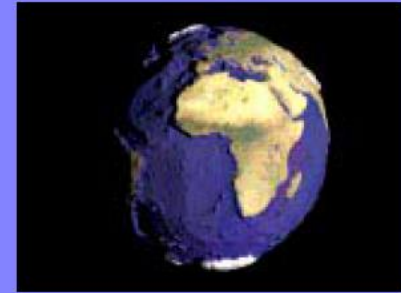
$$G = 6,573 \cdot 10^{-11} \text{Nm}^2 \text{kg}^{-2}$$

$$M = 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$$

$$R = 6,37 \cdot 10^6 \text{m}$$

$$\omega = 7,292 \cdot 10^{-5} \text{rads}^{-1}$$

φ = latitudine del punto di misura





La variazione del campo gravitazionale sulla Terra

Sulla superficie terrestre la gravità cambia con:

- Il luogo

- Non sfericità della Terra (equatore-poli) $\Delta g \cong 5 \times 10^{-2} \text{ms}^{-2}$
- Variazione comp. centrifuga con la latitudine
- Variazione componente newtoniana con l'altitudine $\Delta g \cong 3 \times 10^{-6} \text{ms}^{-2} \text{m}^{-1}$
- Variazione della composizione della Terra $\Delta g \cong 1 \times 10^{-5} \text{ms}^{-2}$
- Non omogeneità del terreno



La variazione del campo gravitazionale sulla Terra

Sulla superficie terrestre la gravità cambia con:

- Il tempo

Fenomeni geodinamici o tettonici
(*movimenti masse sotterranee, terremoti*) $\Delta g \cong 10^{-6} \text{ms}^{-2}$

Attrazione corpi sistema solare
(*maree gravimetriche*) $\Delta g \cong 10^{-6} \text{ms}^{-2}$

Attrazione masse oceaniche
(*ocean loading*) $\Delta g \cong 10^{-7} \text{ms}^{-2}$

Cambiamento ciclico dell'asse di
rotazione della Terra (*nutazione*) $\Delta g \cong 10^{-8} \text{ms}^{-2}$

Cambiamento istantaneo dell'asse di
rotazione della Terra (*polar motion*) $\Delta g \cong 10^{-9} \text{ms}^{-2}$

Variazione pressione atmosferica $\Delta g \cong 10^{-9} \text{ms}^{-2} \text{mbar}^{-1}$



Correzione di latitudine

La correzione si ottiene sottraendo dal valore misurato g_m il valore della gravità normale g_ϕ

$$g_\phi = g_e (1 + \alpha \sin^2 \phi + \beta \sin^4 \phi)$$

Se la zona della campagna gravimetrica è limitata, si può usare una correzione al primo ordine ottenuta derivando la formula della gravità normale:

$$\frac{dg_\phi}{d\phi} = 2g_e \alpha \sin \phi \cos \phi \qquad \frac{dg_\phi}{dl} = \frac{1}{a} \frac{dg_\phi}{d\phi} = \frac{1}{a} g_e \alpha \sin 2\phi = .814 \sin 2\phi \quad \text{mgal/km}$$

Pertanto:
$$\Delta g_\phi = \frac{dg_\phi}{dl} \Delta l$$

ove Δl è lo scostamento in direzione N-S da un punto appropriato in cui la gravità normale è g_0 .
Avremo:

$$g_\phi = g_0 \pm \Delta g_\phi$$

Possiamo pertanto esprimere i contributi della gravità nel punto di misura come:

$$g_m = g_\phi + \varepsilon_1$$

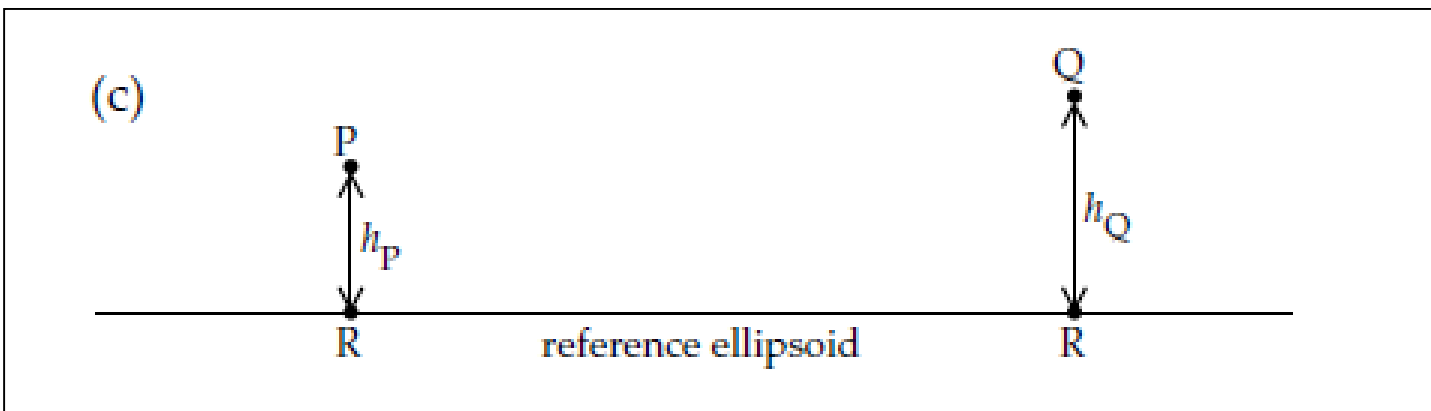
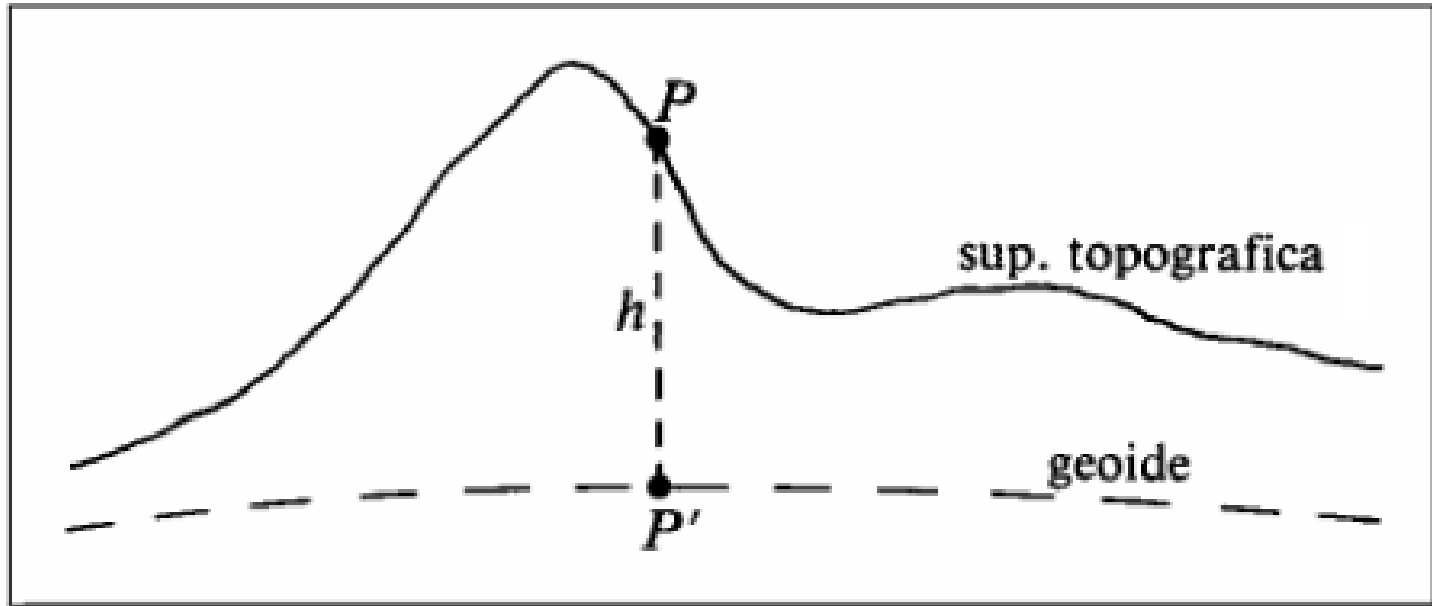
Ove con ε_1 indico il contributo di altri fattori. Pertanto:

$$\varepsilon_1 = g_m - g_\phi = g_m - [g_0 \pm \Delta g_\phi]$$

rappresenta una prima **anomalia residua** ottenuta (che però non ha nome in quanto di poca utilità).



Correzione di aria libera (di Faye)





Correzione di aria libera (di Faye)

Poichè la gravità varia come $1/r^2$, necessita correggere il dato misurato per la differenza di altitudine del punto (stazione) di misura rispetto al geode. La correzione viene detta di aria libera in quanto non tiene conto delle masse interposte tra la stazione ed il geode. Essa viene determinata con grande approssimazione, trascurando la componente centrifuga.

$$g = \frac{GM}{r^2} \rightarrow \frac{dg}{dr} = -\frac{2GM}{r^3} = -\frac{2}{r} \frac{GM}{r^2} = -2g/r \approx -2g_e/a$$

Pertanto la correzione per l'altitudine sarà:

$$|\Delta g_{FA}| = \left| \frac{dg}{dr} \right| \cdot \Delta h = \left| \frac{2g_e}{a} \cdot \Delta h \right| = .3086 \text{ mgal} / m$$

In seconda approssimazione i contributi alla gravità nel punto di misura saranno:

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \varepsilon_2$$

In cui le correzioni per l'altitudine va sottratta se il punto di misura è al di sopra del geode.

Correggendo i dati solamente per la latitudine e l'altitudine si ottiene un'anomalia (ε_2 che però chiamiamo g_{FA}) che risulta utile nelle investigazioni locali e regionali:

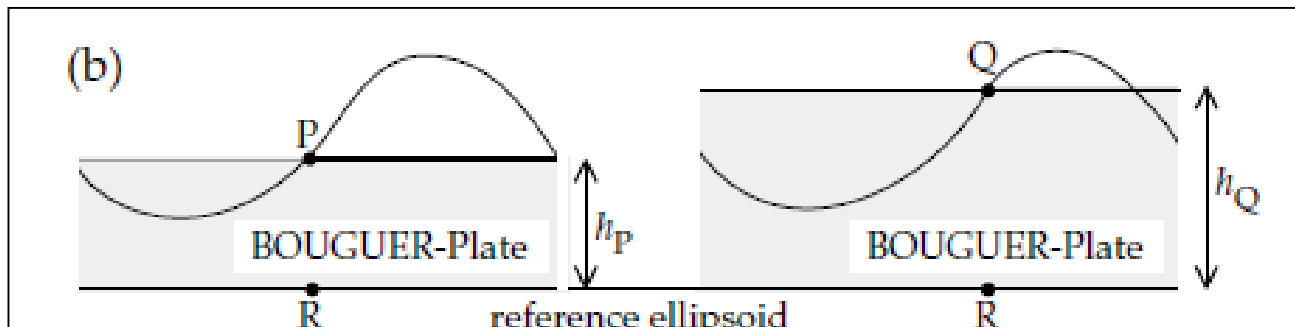
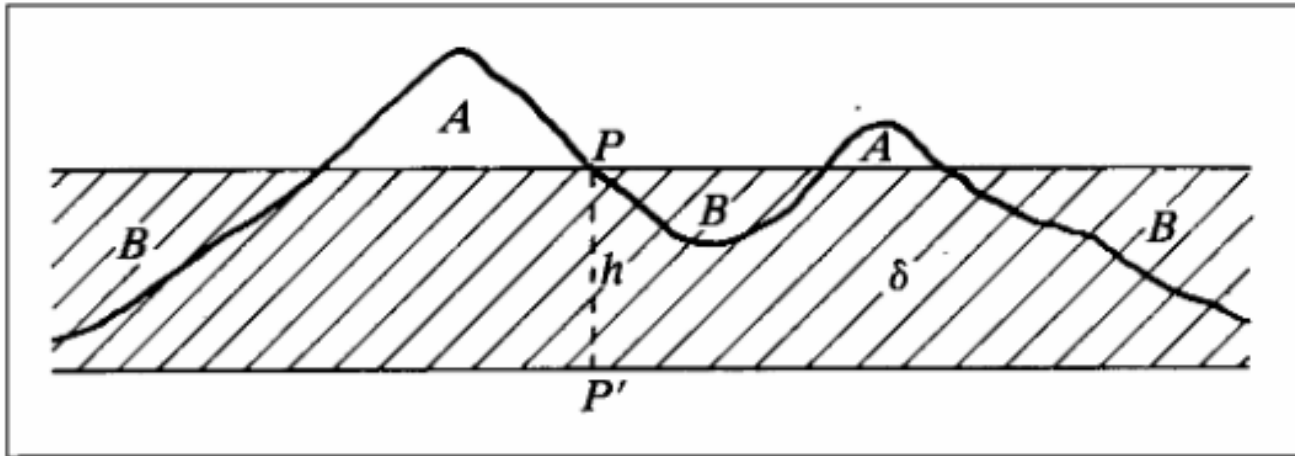
$$g_{FA} = g_m - [g_\varphi - \Delta g_{FA}] = g_m - g_\varphi + \Delta g_{FA}$$

e viene chiamata **anomalia dell'aria libera (free-air anomaly)**.



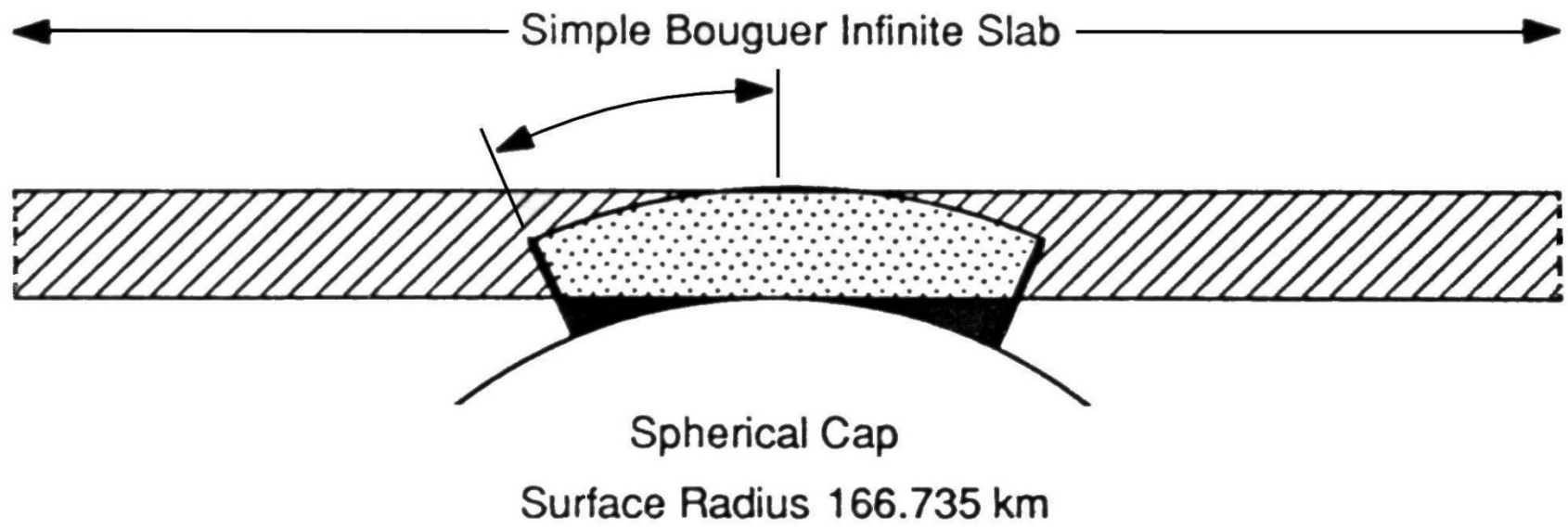
Correzione della piastra (di Bouguer)

Tiene conto dell'attrazione delle masse interposte tra la stazione di misura ad altezza h ed il geode, che è stato ignorato nella correzione ad aria libera. Tale effetto può essere approssimato con quello di una piastra (circolare con raggio $a \rightarrow \infty$) di altezza h e densità uguale alla densità media degli strati sottostanti (NB: non nota in generale, per cui nel caso di campi regionali si assume $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$).





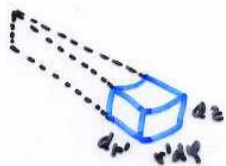
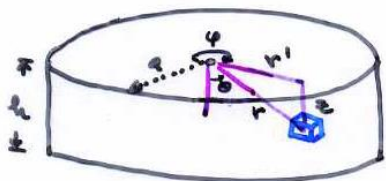
Correzione della piastra (di Bouguer)





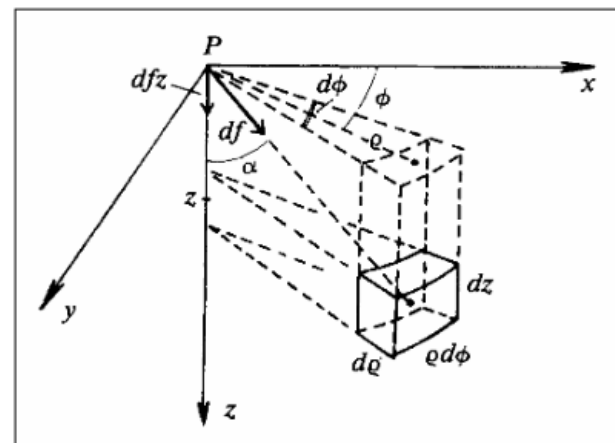
Correzione della piastra (di Bouguer)

Tiene conto dell'attrazione delle masse interposte tra la stazione di misura ad altezza h ed il geode, che è stato ignorato nella correzione ad aria libera. Tale effetto può essere approssimato con quello di una piastra (circolare con raggio $a \rightarrow \infty$) di altezza h e densità uguale alla densità media degli strati sottostanti (NB: non nota in generale, per cui nel caso di campi regionali si assume $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$). Calcoliamo il contributo alla gravità nel punto di misura di un elementino di massa



$$dV = r' dr' d\phi dz$$

$$dg_z = dg \cos \Theta = dg \frac{z}{r}$$



$$dg = G \frac{dm}{r^2} = G\rho \frac{dV}{(r'^2+z^2)} = G\rho \frac{r' dr' d\phi dz}{(r'^2+z^2)}$$

$$\Delta g_B = \int dg_z = G\rho \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h z dz \int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{(r'^2+z^2)^{3/2}} = 2\pi G\rho \int_0^h z dz \int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{[r'^2+z^2]^{3/2}}$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho \int_0^h dz$$

$$\Delta g_B = 2\pi G\rho h$$

$$\int_0^{a \rightarrow \infty} \frac{r' dr'}{[r'^2+z^2]^{3/2}} = \left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2+z^2}} \right]_0^{a \rightarrow \infty} = \frac{1}{z}$$



Pertanto l'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà:

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B + \varepsilon_3$$

La correzione è positiva poichè la piastra attrae con una massa extra il punto di misura rispetto al geoide. La correzione Δg_B risulta (per $\rho=2.67 \text{ g/cm}^3$) di circa **0.112 mgal/m**.

L'anomalia risultante (ε_3) viene detta **anomalia di Bouguer semplice**.

Per ottenere l'anomalia di Bouguer in mare si sostituisce all'acqua di densità 1 g/cm^3 materiale di densità $=2.67 \text{ g/cm}^3$ e quindi si somma l'attrazione addizionale (dovuta al contrasto di densità 1.67 g/cm^3) del materiale

$$2\pi G(1.67 \text{ g/cm}^3) \times (\text{profondità})$$

alla gravità in aria libera. La formula dà una correzione di **0.070 mgal/m**.

Poichè l'anomalia in aria libera è di solito molto piccola, si ottiene una forte anomalia di Bouguer positiva nella maggior parte delle regioni oceaniche. Pertanto, con dati marini, non ci sono vantaggi nell'usare le anomalie di Bouguer rispetto a quelle in aria libera.

Correzione topografica

Se la stazione di misura non è situata su un altopiano, ma in mezzo a montagne e valli, occorre aggiungere alla correzione di Bouguer quella dovuta alla topografia. Da notare che la topografia riduce il valore delle misure: infatti aggiunge all'attrazione verso l'alto (colline), ovvero provoca una mancanza di attrazione verso il basso (valli). Per calcolare le correzioni si suddivide la zona circostante la stazione di misura secondo prismi a sezione di settore circolare con una base alla quota di misura ed altezza corrispondente alla quota media del settore

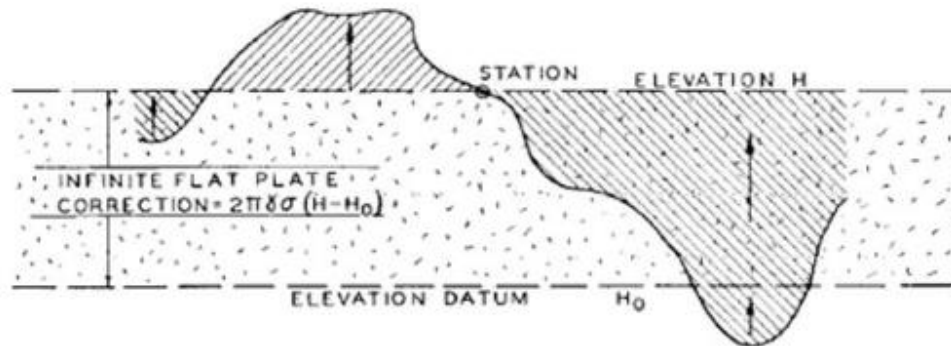
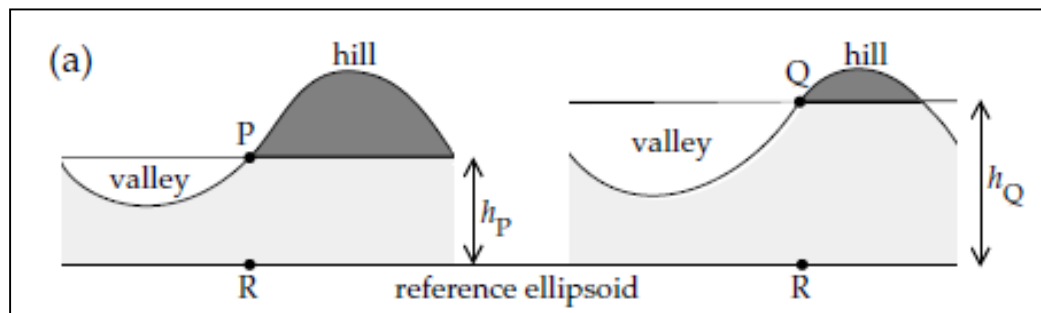


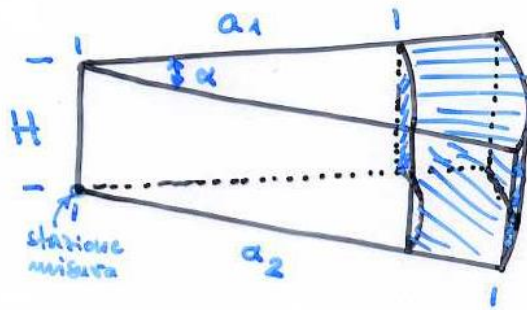
Figura 1.6. Diagramma schematico della correzione di Bouguer, che illustra gli effetti gravitazionali residui dovuti alle ondulazioni topografiche (Hammer, 1939).





Correzione topografica

Se la stazione di misura non è situata su un altopiano, ma in mezzo a montagne e valli, occorre aggiungere alla correzione di Bouguer quella dovuta alla topografia. Da notare che la topografia riduce il valore delle misure: infatti aggiunge all'attrazione verso l'alto (colline), ovvero provoca una mancanza di attrazione verso il basso (valli). Per calcolare le correzioni si suddivide la zona circostante la stazione di misura secondo prismi a sezione di settore circolare con una base alla quota di misura ed altezza corrispondente alla quota media del settore



Il calcolo dell'attrazione gravitazionale è analogo a quello della piastra infinita solo il limite di integrazione per r' varia da a_1 ad a_2 per cui

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{r'^2+z^2}} \right]_{a_1}^{a_2} \rightarrow \int_0^H \left[\frac{1}{\sqrt{a_1^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a_2^2+z^2}} \right] z dz = \sqrt{a_1^2+z^2} \Big|_0^H - \sqrt{a_2^2+z^2} \Big|_0^H = \sqrt{a_1^2+H^2} - \sqrt{a_2^2+H^2} - a_1 + a_2$$

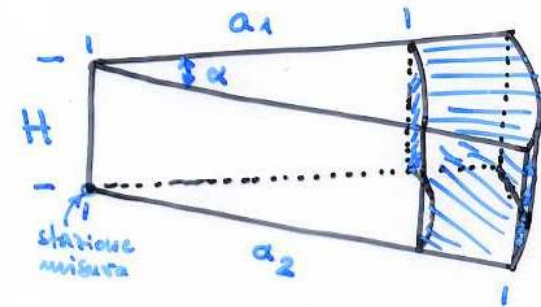
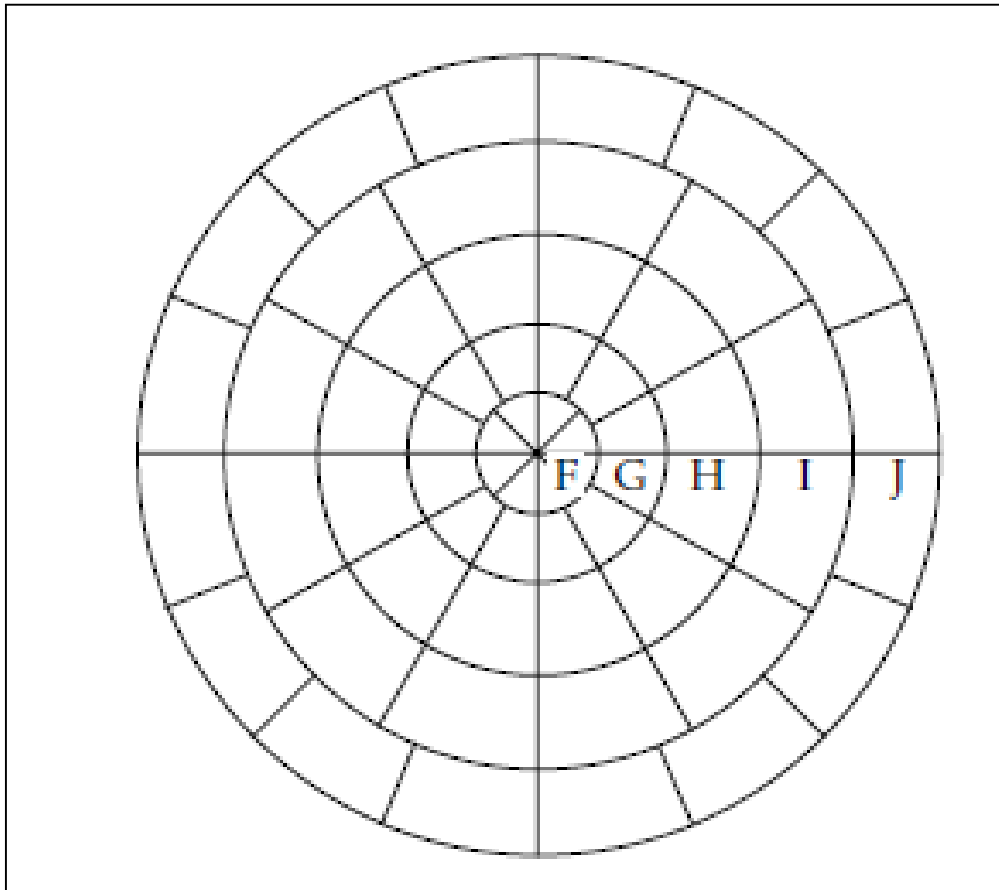
Per cui, variando il limite di integrazione in ϕ tra 0 ed α , avremo

$$\Delta g_T = G\rho\alpha \left[(a_2 - a_1) + \sqrt{a_1^2 + H^2} - \sqrt{a_2^2 + H^2} \right]$$



Fisica Terrestre 2023-2024

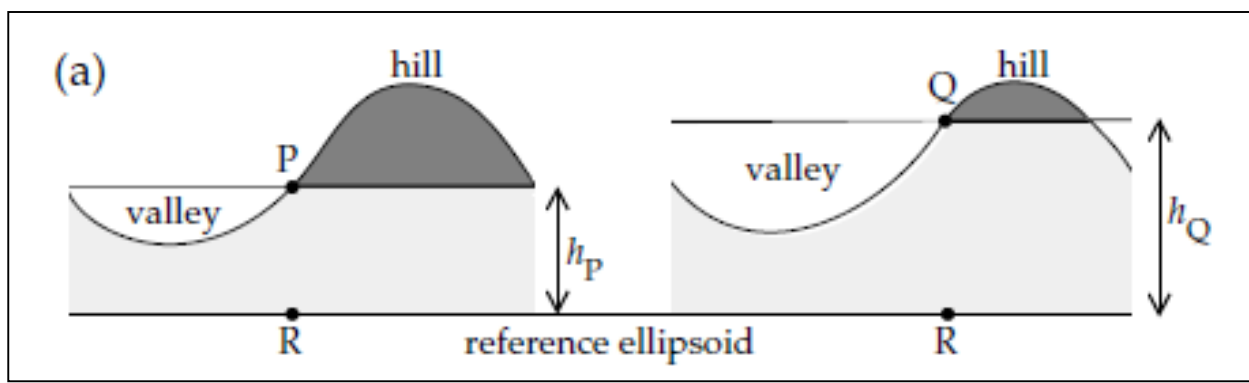
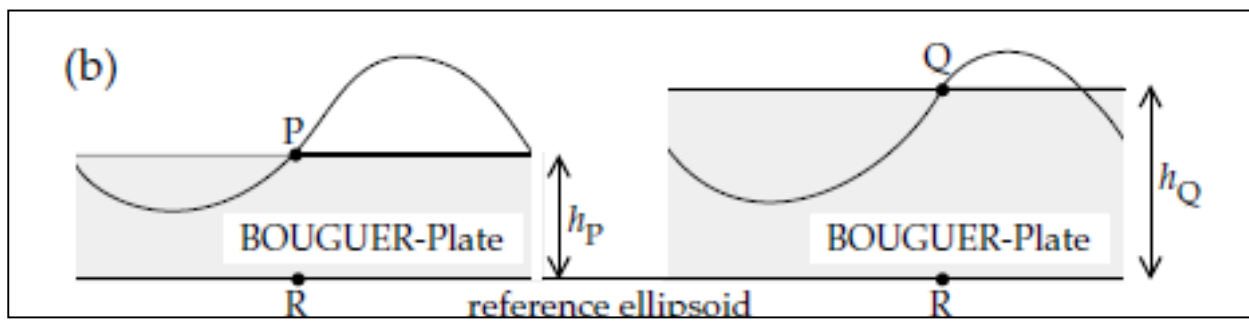
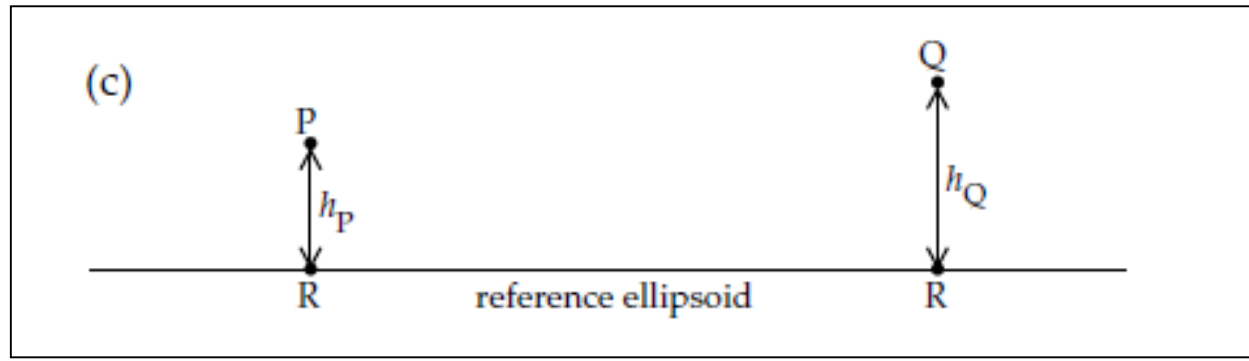
Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa





Ovviamente la correzione Δg_T da applicare sarà la somma delle correzioni dovute ad ogni prisma entro un determinato raggio dalla stazione.

L'approssimazione successiva alla gravità nel punto di misura sarà pertanto

$$g_m = g_\varphi - \Delta g_{FA} + \Delta g_B - \Delta g_T + \varepsilon_4$$

Dicesi **anomalia di Bouguer (completa)** l'anomalia (ε_4) che si ottiene da quella in aria libera correggendola per l'effetto della piastra e della topografia:

$$g_B = g_m - g_\varphi + \Delta g_{FA} - \Delta g_B + \Delta g_T$$

Se la Terra non avesse variazioni di densità laterali, tutte le misure di gravità, corrette per gli effetti visti sopra, sarebbero identiche. Pertanto le differenze residue riscontrabili ε_4 costituiscono un'anomali di gravità g_B che è il risultato di variazioni laterali di densità.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

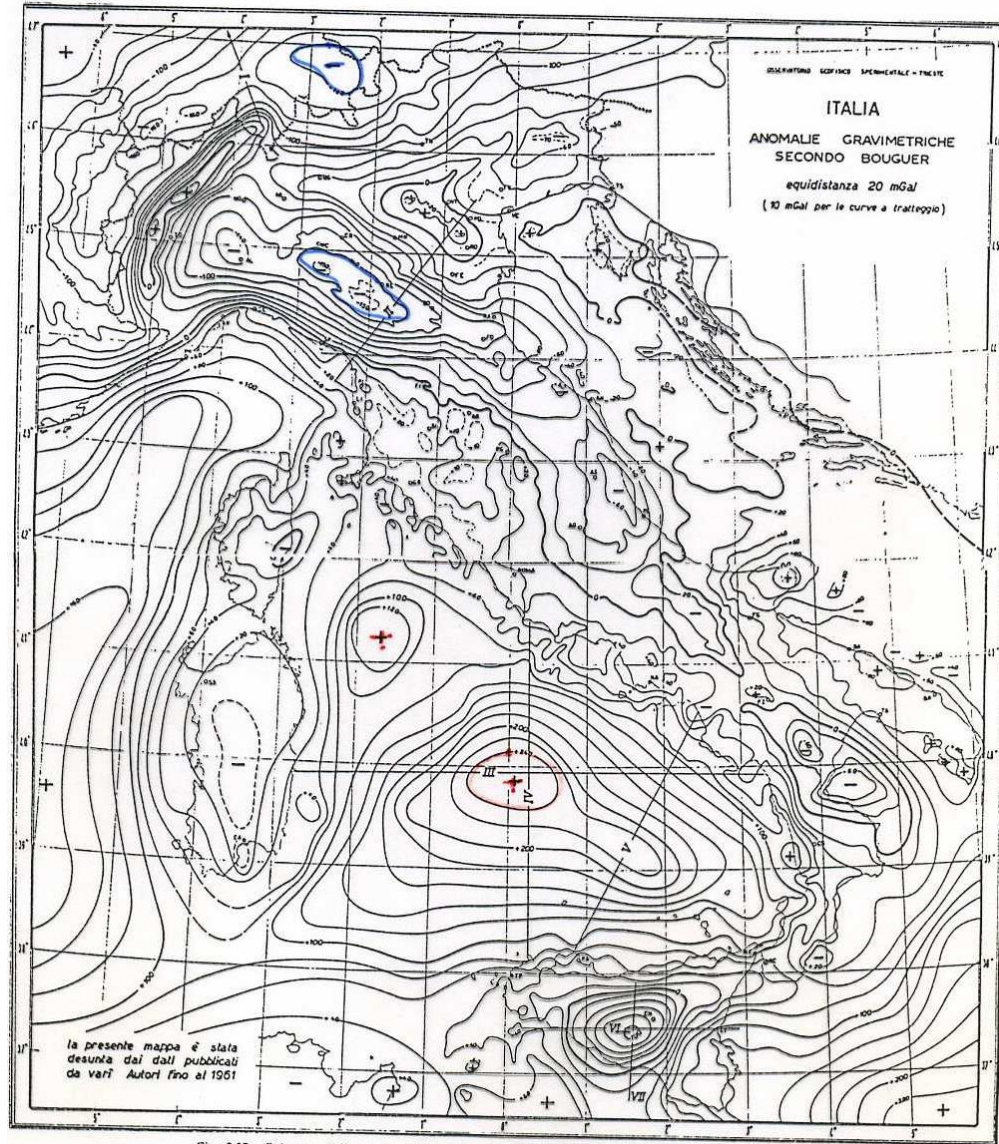
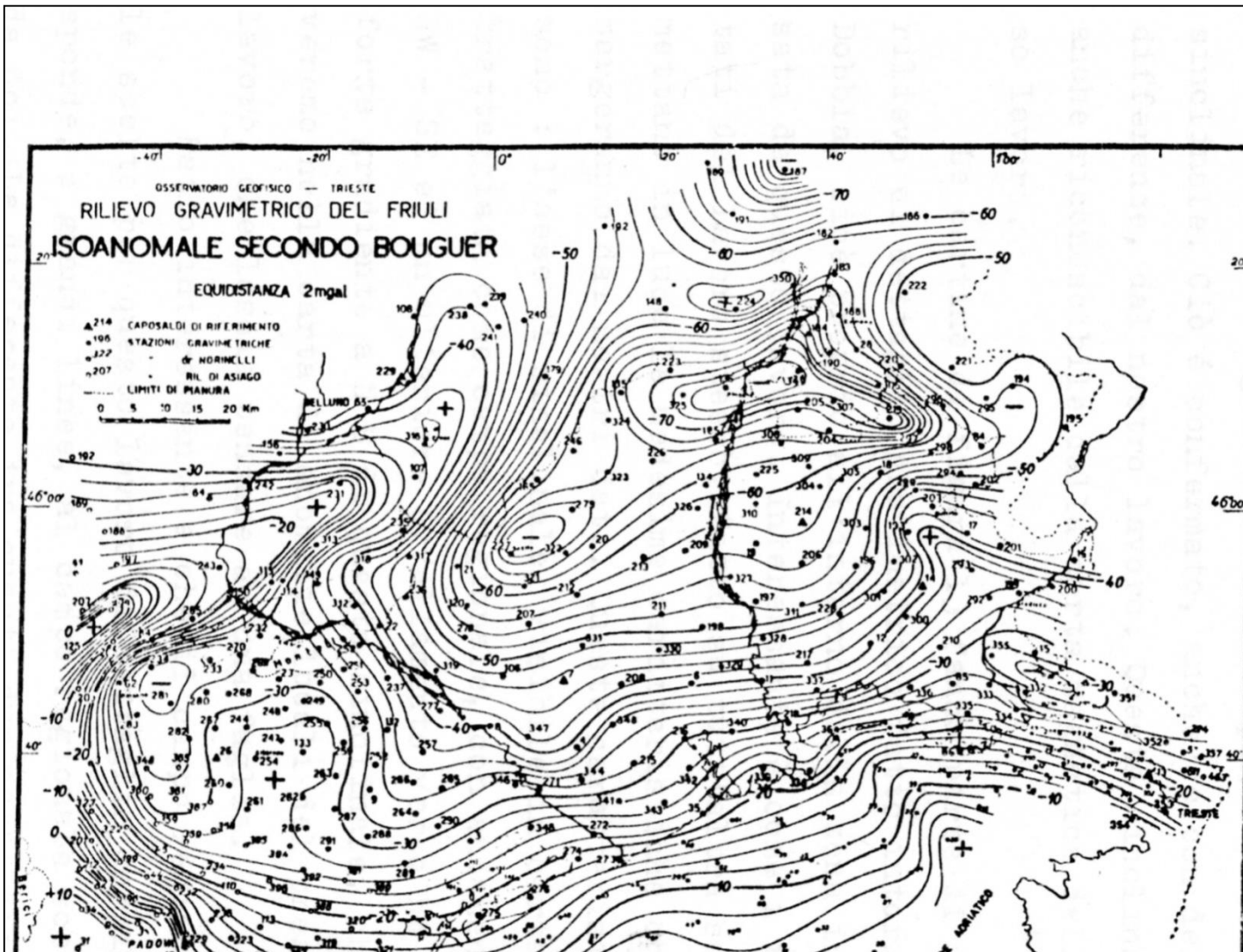


Fig. 2.35 - Schema della carta delle anomalie gravimetriche secondo Bouguer in Italia.



Fisica Terrestre 2023-2024

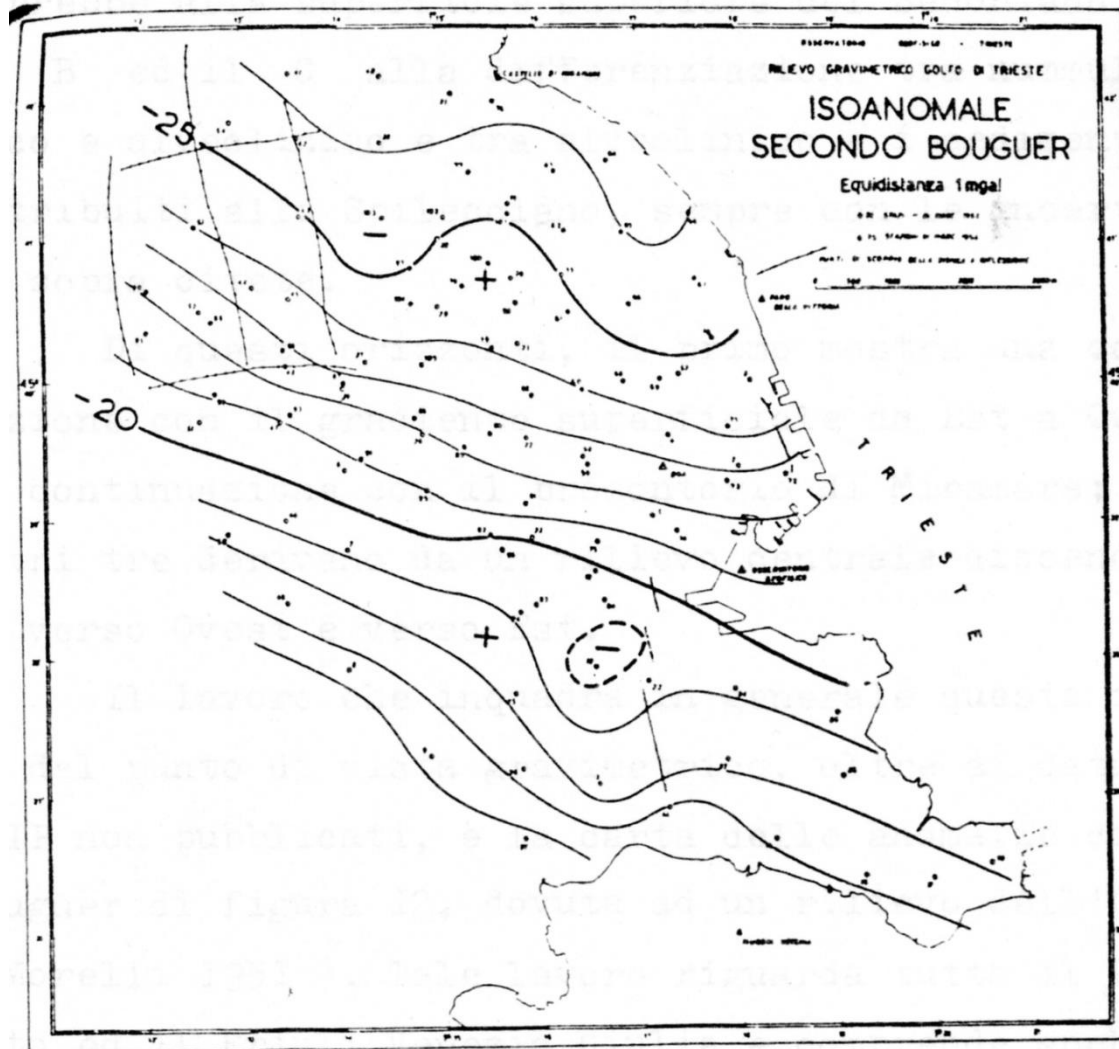
Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

- A gravity anomaly results from the inhomogeneous distribution of density in the Earth. Suppose that the density of rocks in a subsurface body is ρ and the density of the rocks surrounding the body is ρ_0 . The difference $\Delta\rho=\rho-\rho_0$ is called the **density contrast** of the body with respect to the surrounding rocks.
- If the body has a higher density than the host rock, it has a positive density contrast; a body with lower density than the host rock has a negative density contrast. Over a **high-density** body the measured gravity is **augmented**; after reduction to the reference ellipsoid and subtraction of the normal gravity a positive gravity anomaly is obtained.
- Likewise a **negative anomaly** results over a region of **low density**. The presence of a gravity anomaly indicates a body or structure with anomalous density; the sign of the anomaly is the same as that of the density contrast and shows whether the density of the body is higher or lower than normal
- The appearance of a gravity anomaly is affected by the **dimensions, density contrast and depth** of the anomalous body. The horizontal extent of an anomaly is often called its **apparent “wavelength.”** The wavelength of an anomaly is a measure of the depth of the anomalous mass. Large, deep bodies give rise to broad (long-wavelength), low amplitude anomalies, while small, shallow bodies cause narrow (short-wavelength), sharp anomalies.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

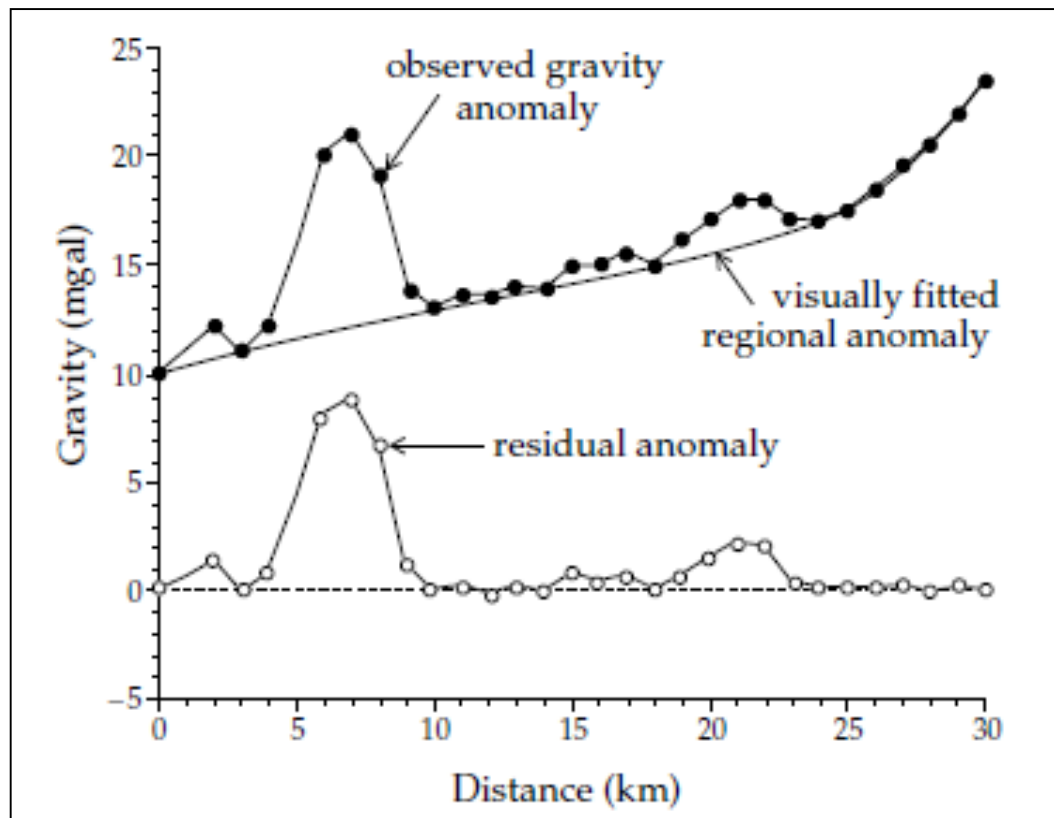
- Usually a map of Bouguer gravity anomalies contain superposed anomalies from several sources. The long-wavelength anomalies due to deep density contrasts are called **regional anomalies**. They are important for understanding the large-scale structure of the Earth's crust under major geographic features, such as mountain ranges, oceanic ridges and subduction zones. Short-wavelength residual anomalies are due to shallow anomalous masses that may be of interest for commercial exploitation.
- Geological knowledge is essential for interpreting the residual anomalies. In eroded shield areas, like Canada or Scandinavia, anomalies with very short wavelengths may be due to near-surface mineralized bodies. In sedimentary basins, short- or intermediate-wavelength anomalies may arise from structures related to reservoirs for petroleum or natural gas.
- The separation of anomalies of regional and local origin is an important step in the interpretation of a gravity map. The analysis may be based on selected profiles across some structure, or it may involve the two dimensional distribution of anomalies in a gravity map.
- Numerous techniques have been applied to the decomposition of a gravity anomaly into its constituent parts. They range in sophistication from simple visual inspection of the anomaly pattern to advanced mathematical analysis.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

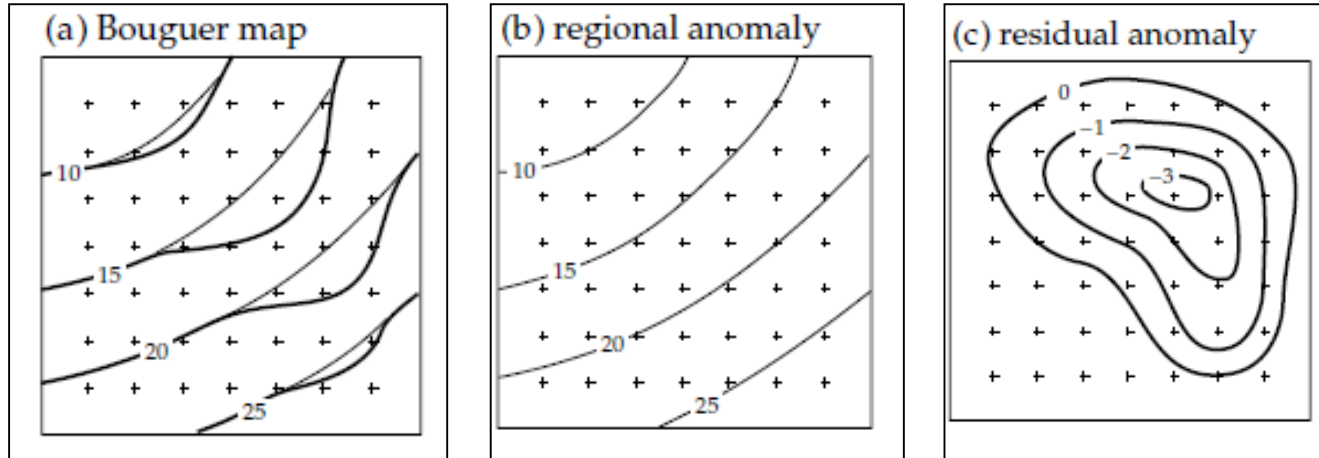
- The simplest way of representing the regional anomaly on a gravity profile is by visually fitting the large-scale trend with a smooth curve. The value of the regional gravity given by this trend is subtracted point by point from the Bouguer gravity anomaly.
- This method allows the interpreter to fit curves that leave residual anomalies with a sign appropriate to the interpretation of the density distribution.





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa



- This approach may be adapted to the analysis of a gravity map by visually smoothing the contour lines: Bouguer gravity curve sharply around a local abnormality.
- The values of the regional and original Bouguer gravity are interpolated from the corresponding maps at points spaced on a regular grid. The regional value is subtracted from the Bouguer anomaly at each point and the computed residuals are contoured to give a map of the local gravity anomaly.
- The experience and skill of the interpreter are important factors in the success of visual methods !



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

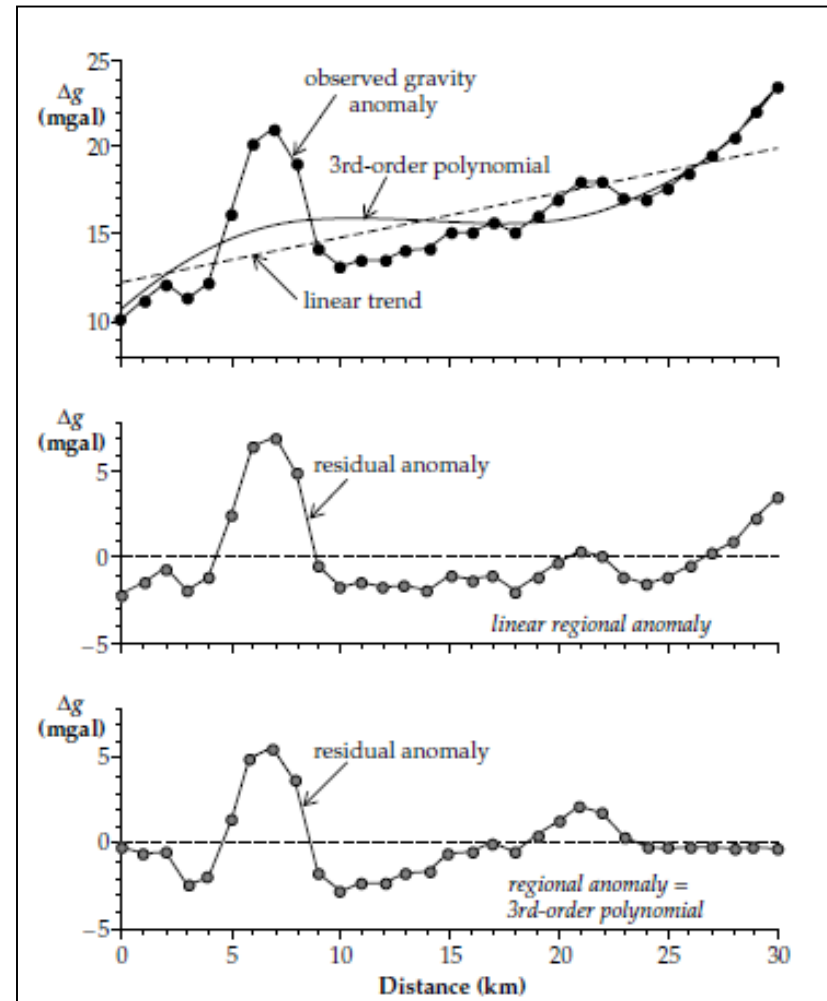
• In an alternative method the regional trend is represented by a straight line or, more generally, by a smooth polynomial curve. If x denotes the horizontal position on a gravity profile, the regional gravity Δg_R may be written:

$$\Delta g_R = \Delta g_0 + \Delta g_1 x + \Delta g_2 x^2 + \Delta g_3 x^3 + \dots + \Delta g_n x^n$$

• The polynomial is fitted by the method of least squares to the observed gravity profile. This gives optimum values for the coefficients Δg_n .

• The method also has drawbacks: the higher the order of the polynomial, the better it fits the observations. The ludicrous extreme is when the order of the polynomial is one less than the number of observations; the curve then passes perfectly through all the data points, but the regional gravity anomaly has no meaning geologically. !

• The interpreter's judgement is important in selecting the order of the polynomial, which is usually chosen to be the lowest possible order that represents most of the regional trend.





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

- Polynomial fitting can also be applied to gravity maps. It is assumed that the regional anomaly can be represented by a smooth surface, $\Delta g(x, y)$, which is a low order polynomial of the horizontal position coordinates x and y . In the simplest case the regional anomaly is expressed as a first-order polynomial, or plane. To express changes in the gradient of gravity a higher-order polynomial is needed. For example, the regional gravity given by a second-order polynomial is written:

$$\Delta g_R(x, y) = \Delta g_{x1}x + \Delta g_{y1}y + \Delta g_{x2}x^2 + \Delta g_{y2}y^2 + \Delta g_{xy}xy$$

- As in the analysis of a profile, the optimum values of the coefficients Δg_{x1} , Δg_{y1} , etc., are determined by least-squares fitting. The residual anomaly is again computed point by point by subtracting the regional from the original data

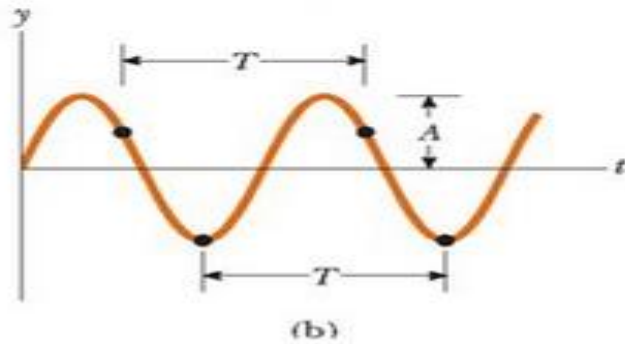
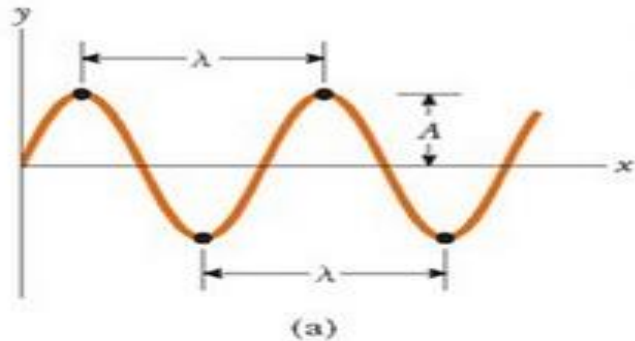


Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

f = frequenza T = periodo

$$f = \frac{1}{T}$$



Frequenza angolare

$$\omega = 2\pi \cdot f = \frac{2\pi}{T}$$

Numero d'onda

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

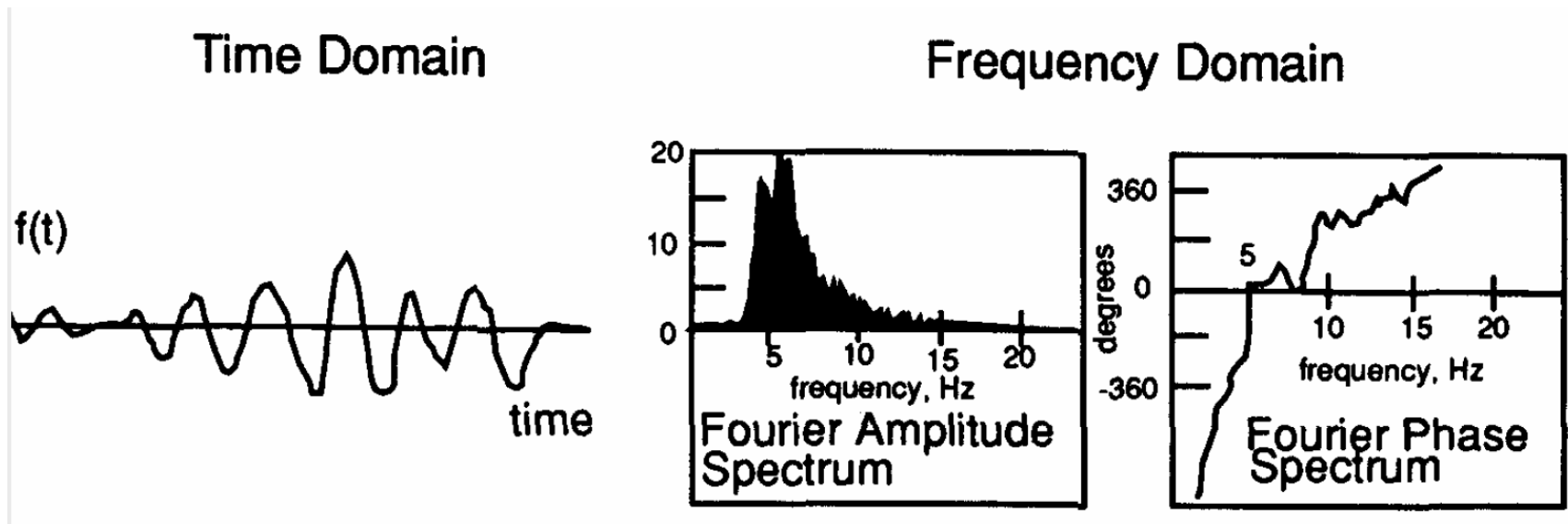
Secondo il **teorema di Fourier** qualsiasi arbitraria funzione transiente $f(t)$ nel dominio dei tempi può essere rappresentata da una funzione equivalente $F(\omega)$ nel dominio della frequenza, cioè la trasformata di Fourier di $f(t)$. Valgono le seguenti relazioni:

$$f(t) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$$

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt = |F(\omega)| \exp(i\phi(\omega))$$

$|F(\omega)| = A(\omega)$ è la densità spettrale dell'ampiezza con l'unità m/Hz, $\omega = 2\pi f$ l'angolo frequenza (con f - frequenza con unità Hz) e $\phi(\omega)$ lo spettro di fase con le unità deg, rad o 2π rad. L'integrale equivale a una somma. Quindi, il teorema di Fourier afferma che una serie temporale arbitraria finita, anche impulsiva, può essere espressa come una somma di funzioni periodiche monocromatiche, ovvero

$$f(t) = 2\pi^{-1} \sum |F(\omega)| \exp(i[\omega t + \phi(\omega)]) \Delta\omega.$$

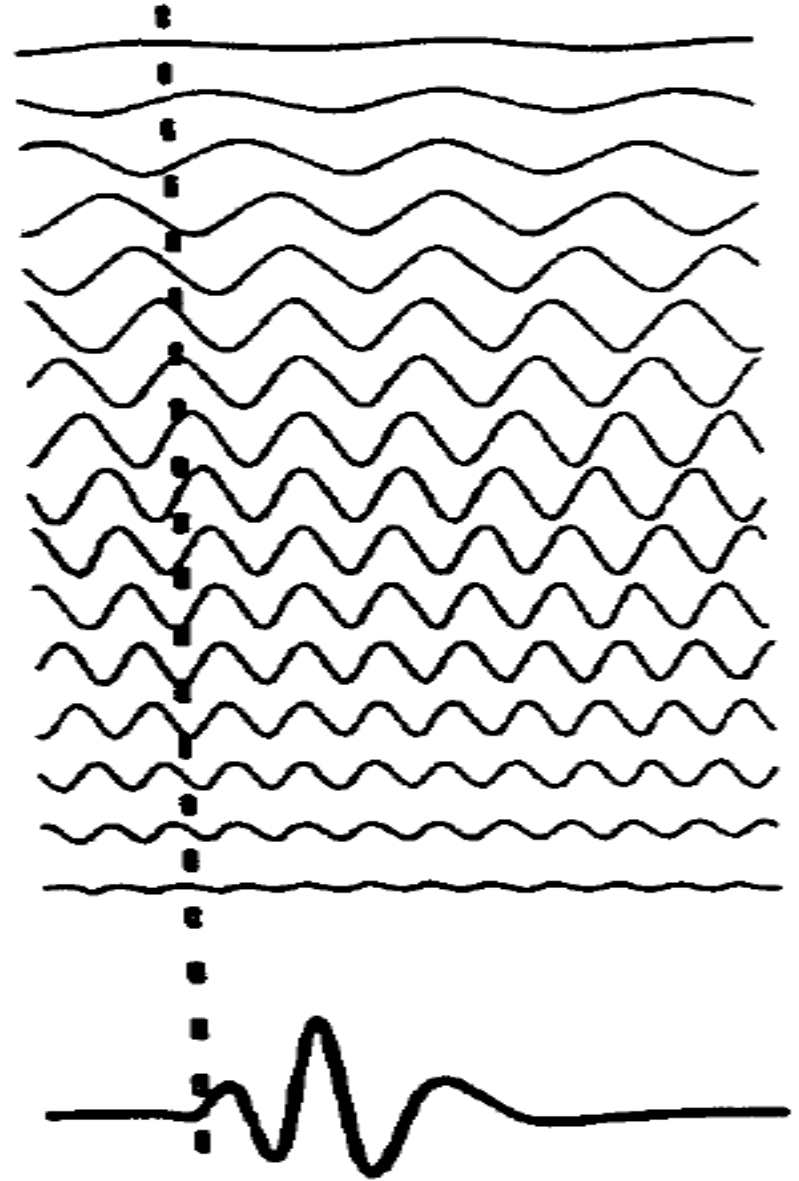


Un segnale registrato in funzione del tempo (a sinistra) può essere rappresentato in modo equivalente nel dominio delle frequenze dal suo spettro di Fourier. L'ampiezza (in centro) e lo spettro di fase (a destra) sono entrambi necessari per ottenere la serie temporale completa.



Fisica Terrestre 2023-2024

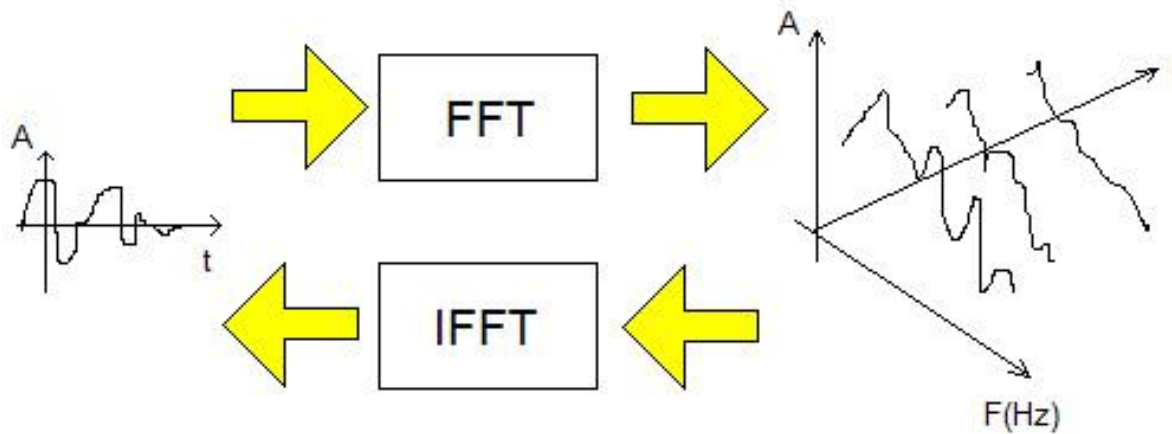
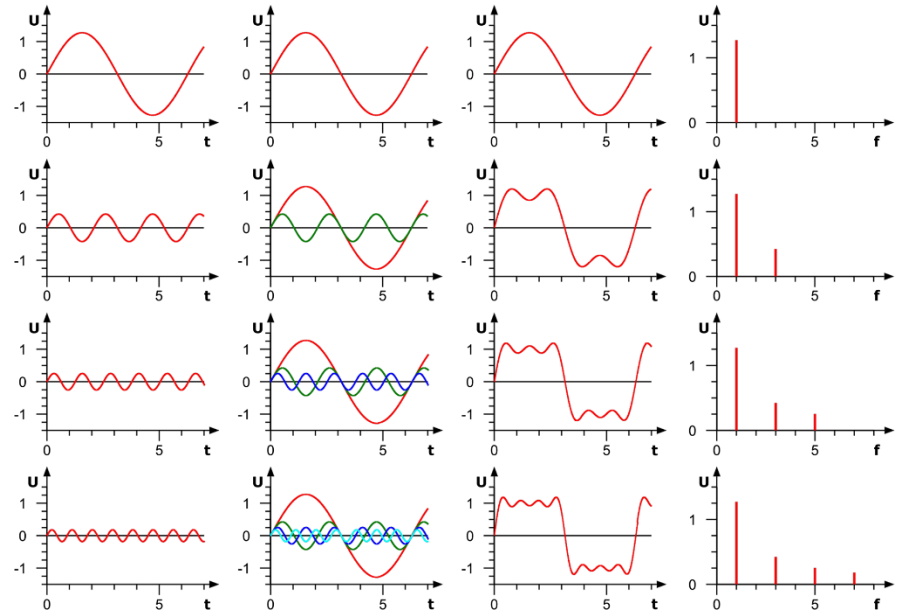
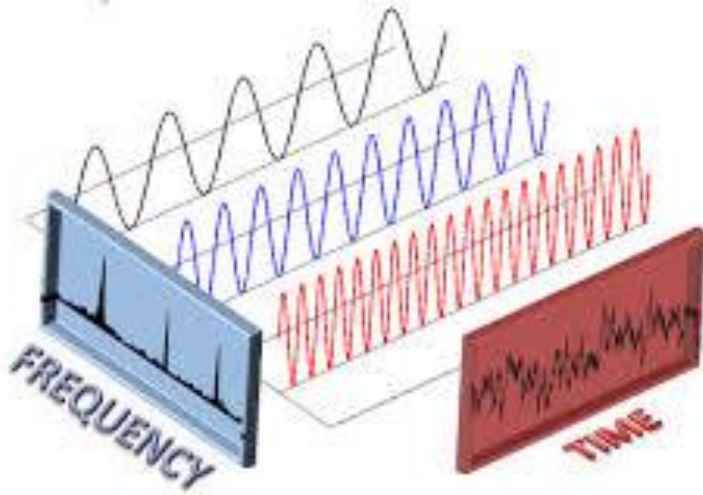
Il transiente $f(t)$ è formato infiniti termini armonici. Le ampiezze di ogni termine armonico varia, essendo descritto dallo spettro di ampiezza. Lo spostamento della la fase di ciascun termine armonico è data dal spettro di fase.





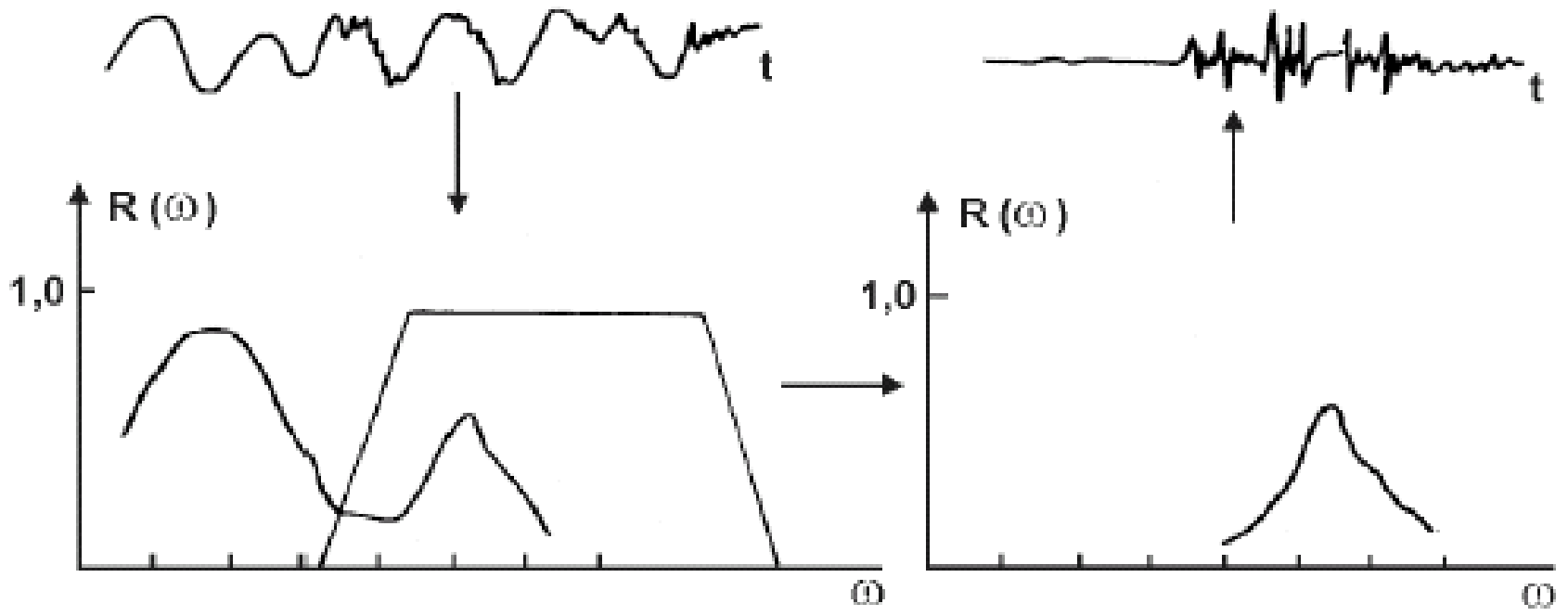
Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa





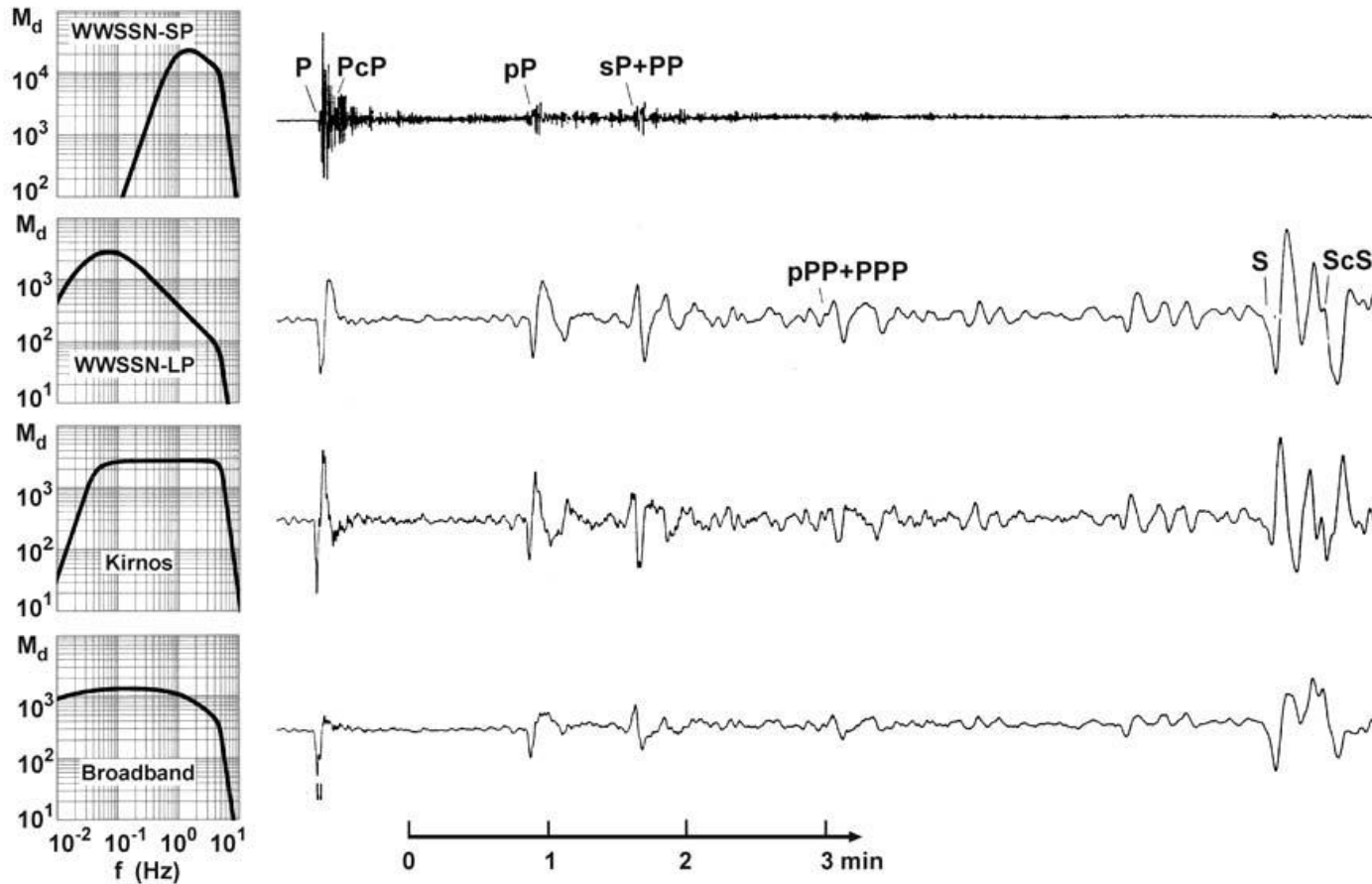
Filtraggio





Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

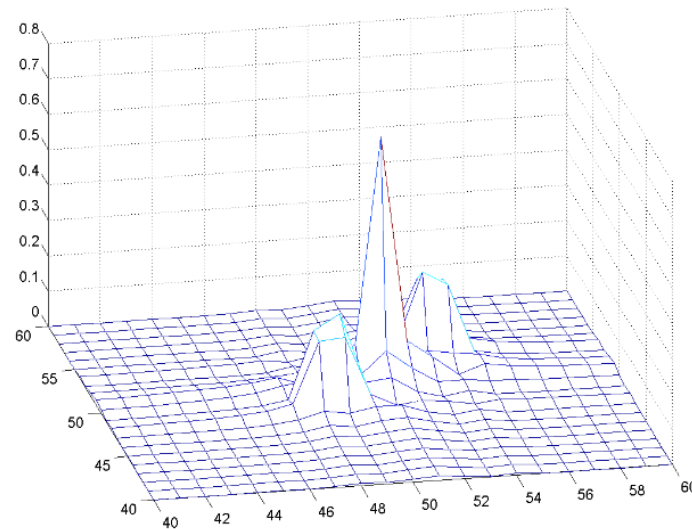
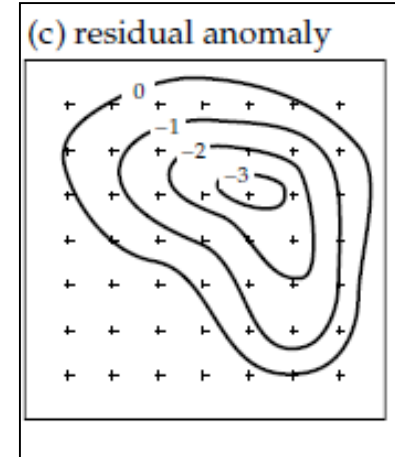
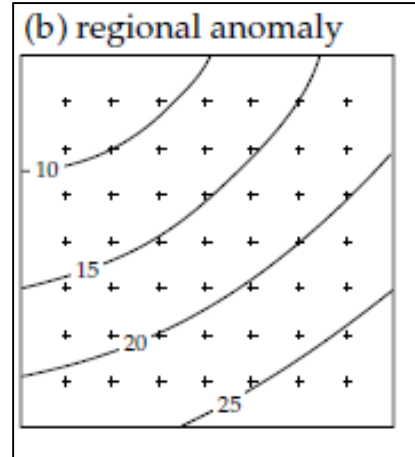
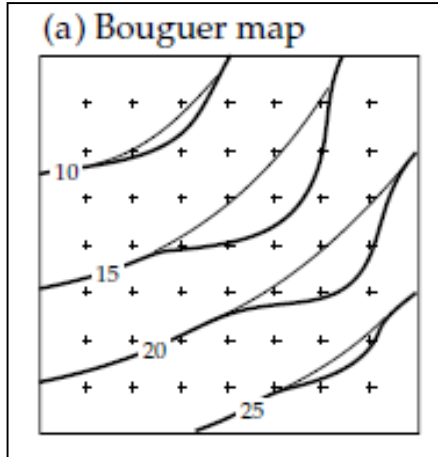


Registrazioni di un forte terremoto ($h = 570$ km, $D = 75^\circ$) all'Osservatorio di Gräfenberg, Germania. Le tracce sono stati derivate filtrando un segnale digitale in velocità a banda larga (banda passante tra 0,05 e 5 Hz) con alcune curve di risposta con caratteristiche standard tradizionali (WWSSN_SP e LP, Kirnos) mentre la traccia in fondo mostra il quasi reale spostamento del terreno ottenuto estendendo il periodo superiore oltre i 100s.



Fisica Terrestre 2023-2024

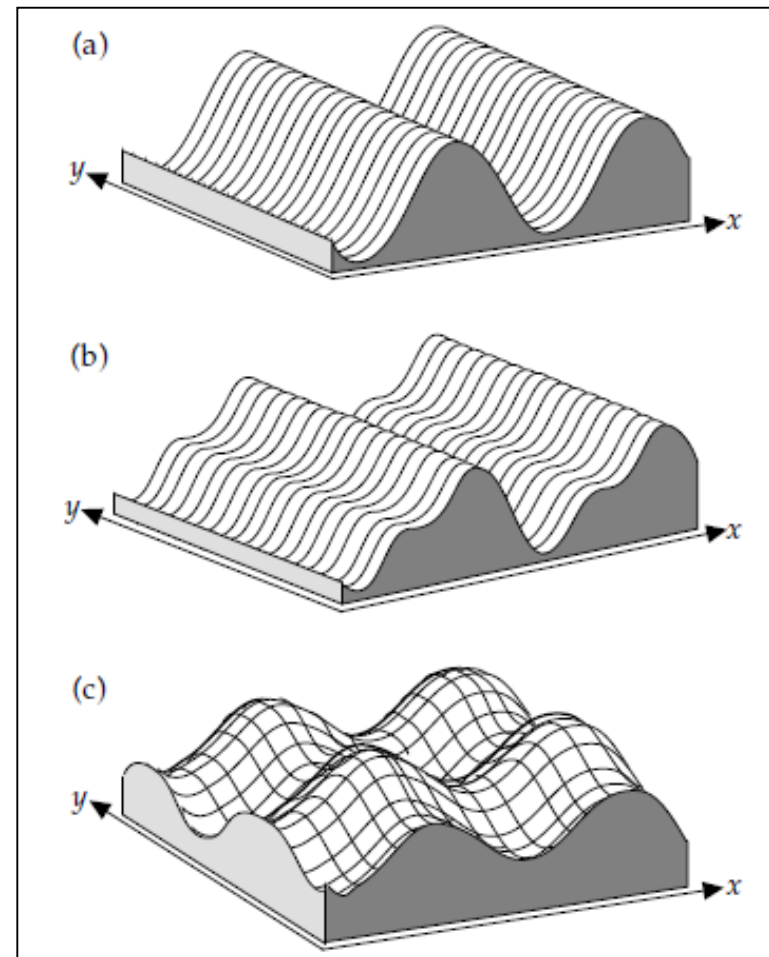
Giovanni Costa



• The gravity anomaly along a profile can be analyzed with techniques developed for investigating time series. Instead of varying with time, as the seismic signal does in a seismometer, the gravity anomaly $\Delta g(x)$ varies with position x along the profile. For a spatial distribution the **wave number**, $k=2\pi/\lambda$, is the counterpart of the frequency of a time series.

• If it can be assumed that its variation is periodic, the function $\Delta g(x)$ can be expressed as the sum of a series of discrete harmonics. Each harmonic is a sine or cosine function whose argument is a multiple of the fundamental wave number. The expression for $\Delta g(x)$ is called a **Fourier series**.

• The breakdown of a complex anomaly (or time series) in terms of simpler periodic variations of different wavelengths is called **Fourier analysis** and is a powerful method for resolving the most important components of the original signal.

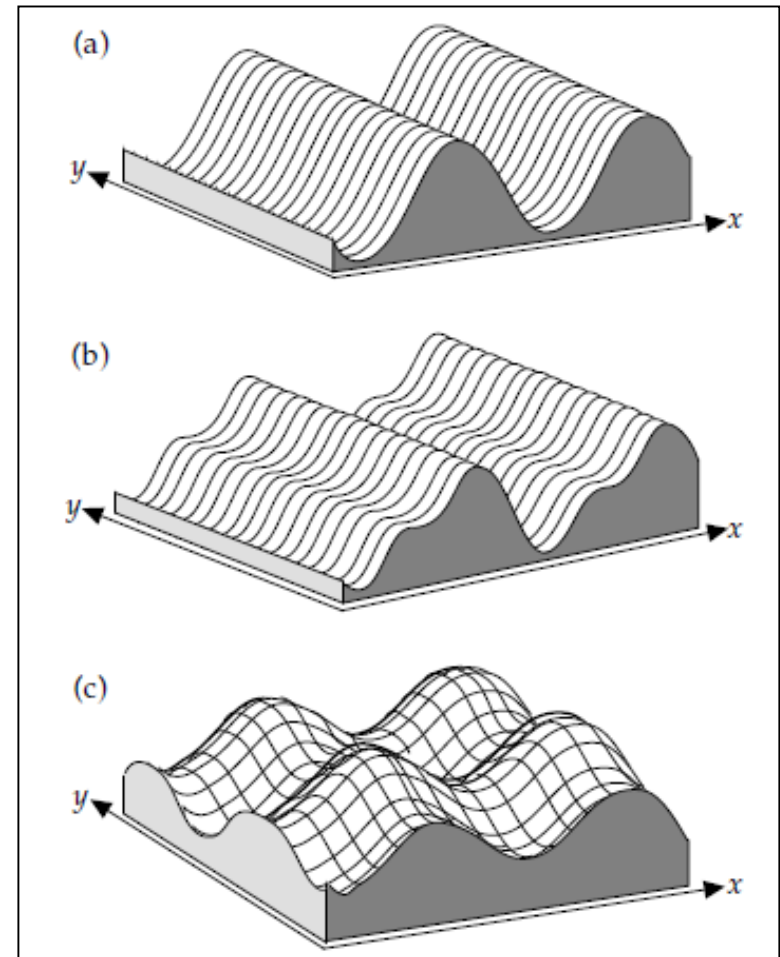




Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

• The two-dimensional variation of a mapped gravity anomaly can be expressed in a similar way with the aid of **double Fourier series**. As in the simpler one dimensional case of a gravity anomaly on a profile, the expression of two-dimensional gravity anomalies by double Fourier series is analogous to summing weighted sinusoidal functions. These can be visualized as corrugations of the x-y plane, with each corrugation weighted according to its importance to $\Delta g(x, y)$.



Fisica Terrestre 2023-2024

Giovanni Costa

- The observed gravity can then be manipulated using the techniques of **Fourier transform**. These techniques involve intensive computations and are ideally suited to digital data-processing with powerful computers.

- The two-dimensional Fourier transform of a gravity map makes it possible to **digitally filter** the gravity anomalies. A filter is a spatial function of the coordinates x and y . When the function $\Delta g(x, y)$ representing the gravity data is multiplied by the filter function, a new function is produced.

- The nature of the filter applied in the Fourier domain can be chosen to eliminate certain wavelengths. For example, it can be designed to cut out all wavelengths shorter than a selected wavelength and to pass longer wavelengths: this is called a **low-pass filter**; it passes long wavelengths that have low wave numbers. The irregularities in a Bouguer gravity anomaly map are removed

- Alternatively, the filter in the Fourier domain can be designed to eliminate wavelengths longer than a selected wavelength and to pass shorter wavelengths. The application of such a **high-pass filter** enhances the short-wavelength (high wave number)

- Wavelength filtering can be used to emphasize selected anomalies.

